This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

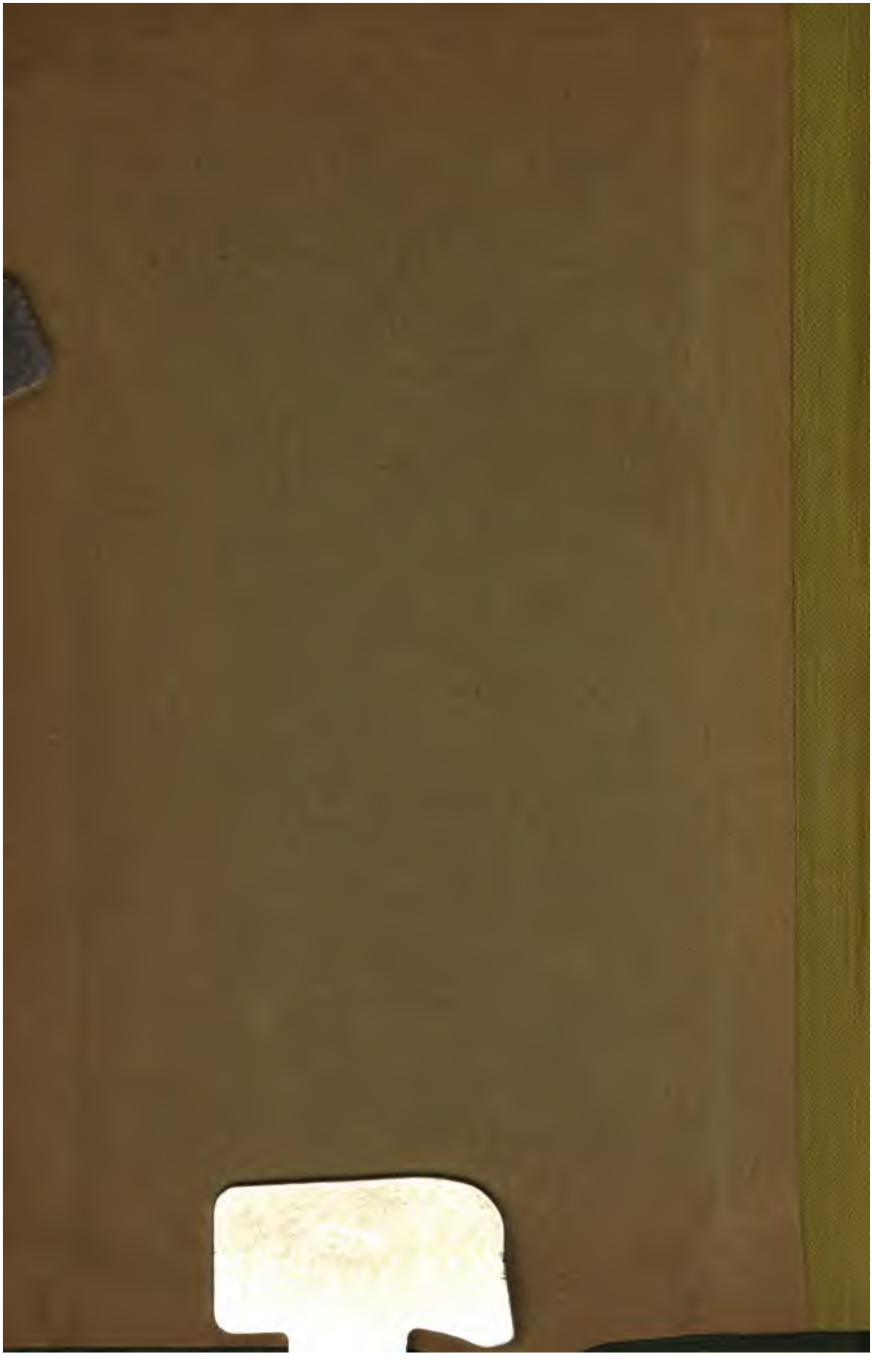
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

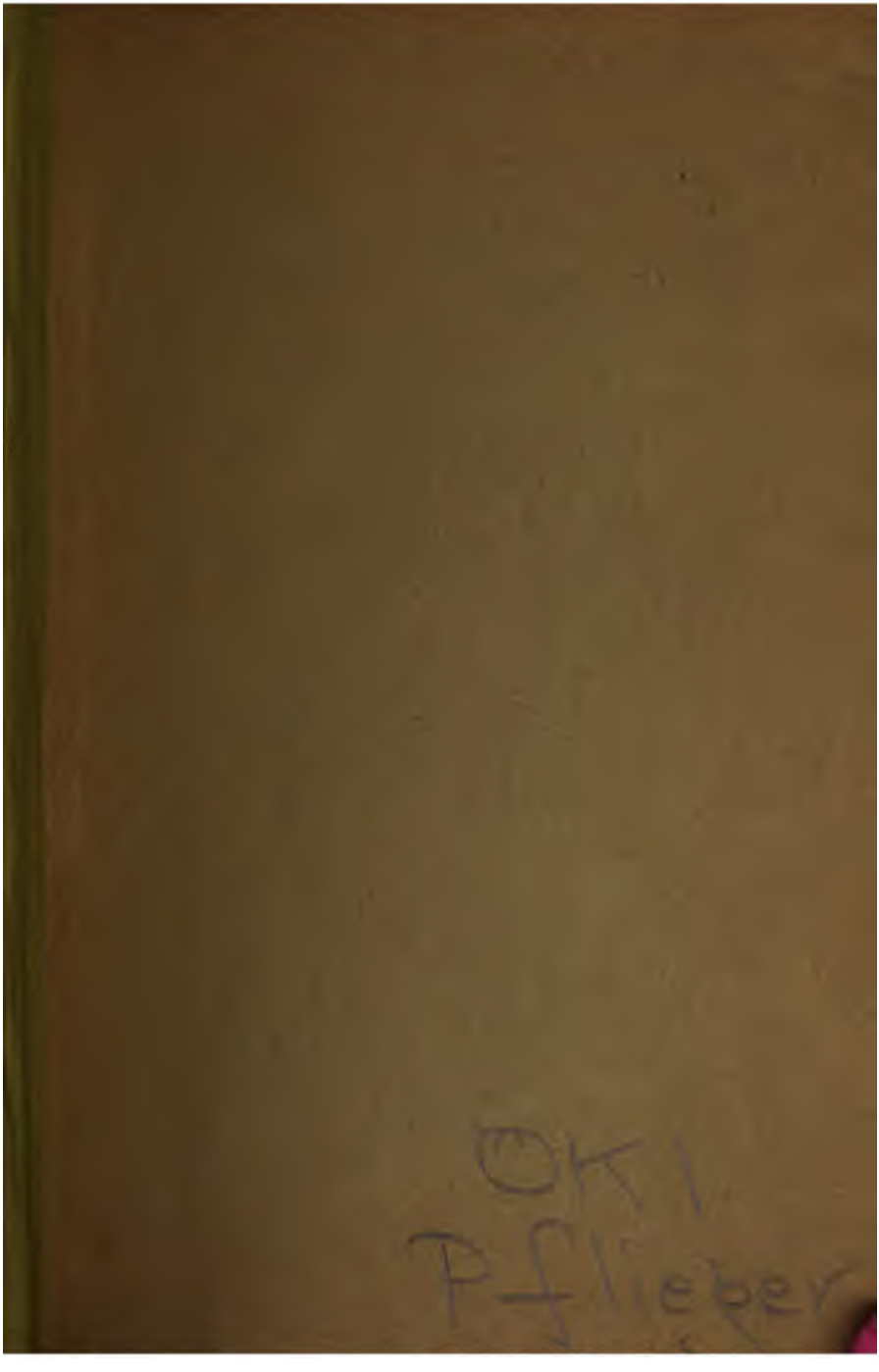
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909606 7





OK 1
Pflieber

Planimetry
(I.C)

Sammlung Schubert II

Elementare Planimetrie

von

Prof. Wilhelm Pflieger
Direktor der Realschule zu Münster im Elsass

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1921
E.E.R

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
203753
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
H 1901 L.

Alle Rechte von der Verlagshandlung vorbehalten.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Vorwort.

Die Anordnung des Stoffes in dem vorliegenden Lehrbuche der elementaren Planimetrie wurde wesentlich durch die Erwägung bedingt, dafs es zweckmäfsig sei, mit der Betrachtung derjenigen Figuren und der Entwickelung derjenigen Begriffe zu beginnen, die am frühesten in den Kreis unserer Vorstellungen treten. Dahin gehören die Kreislinie, der Streifen, das Streifensystem und die Begriffe der Symmetrie, der Kongruenz, der Gleichheit, der Ungleichheit. Dafs beispielsweise der Schüler, der tagtäglich in seinen Heften ein Streifensystem vor Augen hat, so lange hingehalten wird, bis er das Streifensystem zur Teilung der Strecke benutzen lernt, dürfte ein Fehler sein. Andererseits war bei der Stoffverteilung der Wunsch mafsgebend, Zusammengehöriges möglichst in einem und demselben Abschnitte zu behandeln.

Die Begriffe der Kongruenz, der Gleichheit und der Ungleichheit führen bei Gebilden, die sich ins Unendliche erstrecken, zu einer Schwierigkeit, deren Beseitigung bei der Betrachtung der Winkel nicht mehr zu umgehen ist. Am natürlichsten gelangt man zur Lösung des Knotens, wenn man den Winkel als Grenze des Sektors auffafst; thatsächlich wird er ja, wie man ihn auch sonst definieren mag, wie ein Sektor gemessen und verglichen. Man wird so zu dem Grundsatze gedrängt, bei der Vergleichung der Winkel Streifen und Streifenhälften nicht zu berücksichtigen, ein Grundsatz, der das Parallelenaxiom enthält und sich mit dem Simonschen Axiome deckt, dafs die Gesetze des Endlichen für das Unendliche gelten sollen.*)

*) „Die Elemente der Planimetrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie", von Dr. Max Simon, Strafsburg 1890.

Die nicht näher begründete Übertragung der Sprache der Algebra auf das Gebiet der Geometrie mufs an manchen Stellen zu Unklarheiten führen; besondere Sorgfalt wurde daher auf den Ausbau der geometrischen Zeichensprache verwendet.

Die Kreisberechnung wurde mit der Berechnung der Kreisfläche begonnen, da die Anschauung wohl für die Mafszahl des Inhaltes, nicht aber für die des Umfanges, zwei Grenzen in den Mafszahlen des ein- und des umgeschriebenen Vielecks unmittelbar zu erkennen vermag.

Die harmonischen Strahlen wurden unabhängig von den harmonischen Punkten definiert, und zwar ohne Zuhilfenahme von goniometrischen Funktionen. Die gegebene Definition hat den Vorteil, von vornherein auf das Gesetz der Reziprozität hinzuweisen und ohne weiteres zu dem Hauptsatze über harmonische Punkte und Strahlen zu führen.

Von der Kongruenz der Dreiecke als Beweismittel wurde weniger Gebrauch gemacht, als es sonst üblich ist. Einerseits findet dies in der Anordnung des Stoffes seine natürliche Erklärung; andererseits aber dürfte das hier beliebte Beweisverfahren meistens in engerer Beziehung zu der Sache selbst stehen und auch zur Entwickelung des Anschauungsvermögens mehr beitragen. Übrigens dürfte es als eine nützliche Übung zu empfehlen sein, bei Wiederholungen die Beweise möglichst unter Anwendung von Kongruenzsätzen zu führen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Max Simon, spreche ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank für das warme Interesse aus, das er mir bei der Abfassung der vorliegenden Schrift bethätigt hat. Meinem Kollegen, Herrn Oberlehrer Braesch, bin ich für seine Unterstützung bei der Durchsicht der Korrekturbogen zu Danke verpflichtet.

Münster i. E., im November 1900.

W. Pflieger.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
I.	Die Raumgebilde	1
	§ 1. Der Körper	1
	§ 2. Die Fläche	2
	§ 3. Die Linie	3
	§ 4. Der Punkt	5
	§ 5. Beziehungen der Raumgebilde	6
II.	Die Strecke und die ebene Fläche	9
	§ 6. Die Strecke	9
	§ 7. Die Differenz und die Summe von Strecken	12
	§ 8. Die ebene Fläche	18
III.	Die unendlichen Raumgebilde	20
	§ 9. Der Strahl und die Gerade	20
	§ 10. Die Ebene und der Raum	23
IV.	Die Kongruenz und die Gleichheit	26
	§ 11. Endliche Gebilde	26
	§ 12. Unendliche Gebilde	27
V.	Der Kreis und der Winkel	29
	§ 13. Der Kreis als Ort	29
	§ 14. Die Symmetrie des Kreises	33
	§ 15. Der Bogen, der Sektor und die Sehne	35
	§ 16. Der Winkel	43
VI.	Der geometrische Lehrsatz	51
	§ 17. Die Normalform, die Umkehrung und der indirekte Beweis	51
VII.	Die Mittelsenkrechte und die Fundamentalkonstruktionen	55
	§ 18. Die Mittelsenkrechte	55
	§ 19. Die Winkelhalbierende, die Senkrechte und die Parallele	61
	§ 20. Der Kreis durch drei Punkte	66

Seite

VIII. Der Streifen 69
§ 21. Die Streifenwinkel 69
§ 22. Die Querstrecken und die Achse des Streifens 76
§ 23. Die Streifenecke 84
IX. Die Parallele und die Winkelhalbierende . . 102
§ 24. Die Parallele 102
§ 25. Die Winkelhalbierende 106
X. Schnitt und Berührung 111
§ 26. Kreis und Gerade 111
§ 27. Kreis und Kreis 118
§ 28. Tangenten und gemeinschaftliche Tangenten 124
§ 29. Sehnen und Sehnenwinkel 131
§ 30. Winkel im Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden oder zweier Kreise 148
XI. Das Dreieck 155
§ 31. Die Beziehungen zweier Seiten und ihrer Gegenwinkel 155
§ 32. Die Seiten- und die Winkelsätze 161
§ 33. Die ausgezeichneten Linien des Dreiecks . 168
§ 34. Die Kongruenz der Dreiecke 182
§ 35. Merkwürdige Eigenschaften des Dreiecks . 190
XII. Die Vergleichung der Flächen 198
§ 36. Die Hauptsätze der Flächenvergleichung . 198
§ 37. Flächenvergleichung beim rechtwinkeligen Dreieck 203
§ 38. Das Rechnen mit Flächen 209
§ 39. Flächenvergleichung beim schiefwinkeligen Dreieck 221
§ 40. Flächenvergleichung bei Sekantenabschnitten 228
XIII. Die Berührungsaufgabe des Apollonius . . . 235
§ 41. Die elementaren Lösungen der Berührungsaufgabe 235
XIV. Maßzahl, Proportionalität und Ähnlichkeit . 245
§ 42. Strecken, Bogen, Sektoren und Winkel . . 245
§ 43. Flächen 260
§ 44. Proportionalität und Ähnlichkeit 267
§ 45. Metrische Beziehungen im Dreieck 284
XV. Die Vielecke 299
§ 46. Allgemeine Eigenschaften der Vielecke . . 299
§ 47. Das Viereck 304
§ 48. Die regelmäßigen Vielecke 316

Seite

XVI. Die Kreisberechnung 331

§ 49. Die Berechnung der Zahl π 331

XVII. Harmonische Gebilde 340

§ 50. Harmonische Punkte und Strahlen 340

XVIII. Harmonische Eigenschaften des Kreises und Kreisverwandtschaft 358

§ 51. Pol und Polare 358

§ 52. Die direkte Kreisverwandtschaft 366

§ 53. Die inverse Kreisverwandtschaft 378

XIX. Die doppelte Verwandtschaft zweier Kreise 380

§ 54. Ähnlichkeitspunkte, -strahlen und -achsen 380

XX. Die Kreisbüschel 403

§ 55. Der Potenzbegriff und die Potenzlinien zweier Kreise 408

Erstes Kapitel.

Die Raumgebilde.

§ 1. Der Körper.

Was auf unsere Sinne einwirkt oder unter gewissen Umständen auf unsere Sinne einwirken kann, heifst Stoffkörper. Jeder Stoffkörper nimmt einen bestimmten Platz (Raum) ein, der nicht gleichzeitig der Platz eines andern Stoffkörpers sein kann. Man sagt daher, die Stoffkörper seien undurchdringlich.

Der von einem Stoffkörper eingenommene Platz heifst geometrischer Körper oder Körper schlechthin. Wenn ein Stoffkörper sich fortbewegt, so entspricht ihm in jeder neuen Lage ein neuer geometrischer Körper. Einzelne dieser Körper durchdringen sich, andere liegen nebeneinander. Die geometrischen Körper sind also nicht undurchdringlich. Das, was zwei sich durchdringenden Körpern gemeinschaftlich ist, ist wieder ein geometrischer Körper.

Durch die Betrachtung der Stoffkörper erwerben wir die Fähigkeit, uns Vorstellungen von geometrischen Körpern zu bilden.

Übungen zu § 1.

1. Man führe Beispiele von Stoffkörpern an, die nur durch Vermittelung 1) des Gesichtsinnes, 2) des Tastsinnes, 3) des Geruchsinnes wahrgenommen werden.

2. Welcher Sinn ist allein bei der Wahrnehmung eines Gestirnes beteiligt?

3. Unter welchen besondern Umständen wird die Luft vermittelst des Tastsinnes wahrgenommen?

4. Warum ist der im Wasser schwimmende Fisch kein Beweis gegen die Undurchdringlichkeit der Stoffkörper?

5. Was soll damit gesagt werden, wenn nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche von einem Naturkörper behauptet wird, dafs er sich in einem andern Naturkörper befinde?

§ 2. Die Fläche.

1. Wenn man in ein Gefäfs Wasser und Öl gieſst, so breitet sich das Öl über dem Wasser aus, und es zieht sich zwischen beiden Stoffkörpern eine Grenze hin, die weder ein Bestandteil des einen, noch ein Bestandteil des andern ist; sie bezeichnet zugleich das Ende des einen und den Anfang des andern Stoffkörpers. Dieselbe Grenze trennt auch die geometrischen Körper, welche den betrachteten Stoffkörpern entsprechen. Wie zwischen dem Öl und dem Wasser, so besteht auch eine Grenze zwischen dem Öl und dem Glase und zwischen dem Öl und der Luft. Diese drei Grenzen bilden zusammen die vollständige Grenze des Ölkörpers und des ihm entsprechenden geometrischen Körpers.

Die gemeinschaftliche Grenze zweier Körper und die Grenze eines Körpers nennt man Fläche. Die als Grenze eines Körpers betrachtete Fläche heifst auch die Oberfläche desselben.

2. Das Wasser und das darüber gelagerte Öl kann man als einen einzigen Stoffkörper, die dem Öl und dem Wasser entsprechenden geometrischen Körper als einen einzigen geometrischen Körper betrachten. Die beiden Teile des neuen Körpers haben eine Fläche als gemeinschaftliche Grenze, sie heifst eine Querfläche des Körpers. Man kann je zwei Körper mit gemeinschaftlicher Grenze als einen einzigen Körper auffassen, aber auch umgekehrt jeden Körper durch eine Querfläche in zwei Teilkörper zerlegt denken.

Ein durch eine Querfläche geteilter Körper kann durch eine zweite Querfläche geteilt gedacht werden. Diese ist entweder für die beiden Teilkörper, die durch die erste Querfläche bestimmt werden, oder nur für den einen von ihnen eine Querfläche. So kann jede neue Querfläche des Urkörpers für mehrere seiner Teilkörper oder nur für den einen von ihnen eine Querfläche sein. Sie kann aber auch für einzelne Teilkörper eine mehrfache Querfläche sein.

3. Da eine Fläche die Grenze eines Körpers ist, so ist die Vorstellung einer Fläche unzertrennlich mit der eines Körpers verknüpft. Die erste Vorstellung ist ohne die zweite nicht möglich, sie wird aber stets durch die zweite gegeben.

Das dünnste Blatt ist ein Stoffkörper; es genügt aber, um die Vorstellung einer Fläche hervorzurufen. In diesem Sinne kann man sagen, daſs ein dünnes Blatt eine Fläche veranschauliche.

Übungen zu § 2.

1. Inwiefern veranschaulicht ein Bleistift zwei Stoffkörper, die eine gemeinschaftliche Grenze besitzen? Führe weitere Beispiele von Stoffkörpern an, die eine gemeinschaftliche Grenze haben.

2. Inwiefern ist auf der Erdoberfläche die Oberfläche jedes Stoffkörpers eine gemeinschaftliche Grenze von zwei Stoffkörpern?

3. Man führe Beispiele von Stoffkörpern mit gemeinschaftlicher Grenze an, die wir als einen einzigen Stoffkörper zu betrachten pflegen (siehe Nr. 1).

4. Man untersuche an einem Stoffkörper, in wieviel Teilkörper er durch zwei Querflächen zerfällt, 1) wenn die zweite Querfläche nur für einen der Teilkörper, die durch die erste bestimmt werden, eine Querfläche ist, 2) wenn die zweite Querfläche für jeden dieser Teilkörper eine einfache Querfläche ist.

5. In wieviel Teile wird ein Körper durch zwei Querflächen zerlegt, wenn die zweite für jeden der Teilkörper, die durch die erste Querfläche bestimmt werden, eine zweifache Querfläche ist?

§ 3. Die Linie.

1. Die Fläche, die in einem Glasgefäſse die Grenze zwischen dem Wasser und dem Öl bildet, erstreckt sich bis an die Grenzfläche zwischen dem Gefäſskörper und den Flüſsigkeiten. An beiden Flächen entlang zieht sich eine für beide gemeinschaftliche Grenze hin, die weder ein Bestandteil der einen Fläche, noch ein Bestandteil der andern ist, ebensowenig wie sie ein Bestandteil der drei Körper ist, die in ihr zusammenstoſsen.

Ist die Wand des Gefäſses ein Spiegel, so sieht man sowohl die Flüſsigkeiten als auch ihre gemeinschaftliche Grenze sich hinter dem Spiegel fortsetzen. Das, was zuerst als Grenze zwischen zwei Flächen oder als Grenze einer Fläche aufgefaſst wurde, erscheint dann als das Gemeinsame zweier Flächen, die sich durchdringen, nämlich der gemeinschaftlichen Grenzfläche der Flüſsigkeiten und ihrer Spiegelbilder einerseits, und der Fläche, die den Spiegel von den Flüſsigkeiten scheidet, anderseits.

Die Grenze einer Fläche, die gemeinschaftliche Grenze zweier Flächen und das Gemeinsame von zwei sich durchdringenden Flächen nennt man Linie. Bei der letzten Auffaſsung der Linie heiſst diese auch die Schnittlinie oder der Durchschnitt von zwei Flächen.

2. Ebenso wie zwei Körper mit gemeinschaftlicher Grenze als ein einziger Körper aufgefaſst werden können, kann man auch je zwei Flächen mit gemeinschaftlicher Grenze als eine einzige Fläche betrachten. Diese gemeinschaftliche Grenze der Urflächen teilt die neue Fläche in zwei Teilflächen und heiſst deswegen eine Querlinie derselben. Umgekehrt kann man jede Fläche durch Querlinien in beliebig viele Teilflächen zerlegt denken. Jede neue Querlinie einer schon geteilten Fläche ist für mehrere der bereits vorhandenen Teilflächen oder nur für eine einzige unter ihnen eine Querlinie. Sie kann auch für einzelne Teilflächen eine mehrfache Querlinie sein.

Die Querlinien einer Fläche sind Grenzen für deren Teile, aber nicht für die Fläche selbst. Die Oberfläche eines Körpers ist daher stets unbegrenzt, selbst wenn sie durch Querlinien geteilt wird. Die Querlinien einer begrenzten Fläche werden entweder durch die Grenze der Fläche begrenzt oder sind unbegrenzt. Querlinien einer unbegrenzten Fläche sind stets unbegrenzt.

3. Die Vorstellung einer Linie ist mit der Vorstellung einer Fläche, also auch mit der eines Körpers, unzertrennlich verbunden. Denken wir uns durch einen Körper eine Querfläche gelegt, so erscheint auch seine Oberfläche in zwei Teile geteilt. Die Vorstellung, die wir so von einer Linie erhalten, bleibt unverändert bestehen, wenn wir von dem Körper Teile abtrennen, wofern nur keiner dieser Teile an die betrachtete Linie grenzt. Setzt man die Abtrennung

solcher Teile weit genug fort, so bleibt von dem Körper ein dünner Rest zurück, der uns zu der Aussage berechtigt, daſs ein feiner Faden oder ein Strich mit einer feinen Spitze uns die Vorstellung einer Linie gebe.

Übungen zu § 3.

1. Unter den folgenden Stoffkörpern suche man aus: 1) diejenigen, deren Oberfläche naturgemäſs als aus mehreren Flächen zusammengesetzt aufgefaſst wird, 2) die Körper, deren Oberfläche ungeteilt erscheint: ein Ei, ein Würfel, eine Pyramide, eine Kugel, eine Halbkugel, ein Kegel, ein Vergröſserungsglas.

2. Zu welcher Art von Querlinien gehören die Parallelkreise und der Äquator eines Globus, zu den begrenzten oder unbegrenzten?

3. Zu welcher Art von Flächen gehört die nördliche Halbkugel eines Globus?

4. Eine Fläche soll durch zwei Querlinien so geteilt werden, daſs jede derselben für jede der Teilflächen, die durch die andere Querlinie bestimmt werden, eine zweifache Querlinie ist.

5. Eine Fläche soll durch Querlinien so geteilt werden, daſs jede später gezogene für jede der bereits vorhandenen Teilflächen eine einfache Querlinie ist.

6. Man teile eine begrenzte Fläche durch zwei unbegrenzte und eine begrenzte Querlinie.

§ 4. Der Punkt.

Teilt man einen Körper durch eine Querfläche in zwei Teile, und legt man diese in ihrer ursprünglichen Lage aneinander, so erscheint die Oberfläche des Körpers durch eine Querlinie in zwei Teile zerlegt. Wenn man dann durch den Körper eine zweite Querfläche legt, welche für jeden der bereits vorhandenen Teilkörper eine Querfläche ist, so erhält man auf der Oberfläche des wieder zusammengesetzten Urkörpers eine zweite Querlinie. Jede Querlinie wird durch die andere geteilt. Das Gemeinsame beider Linien kann auch als Grenze der in ihm zusammenstossenden Teillinien oder als Grenze einer solchen Teillinie aufgefaſst werden.

Die Grenze einer Linie, die gemeinschaftliche Grenze zweier Linien und das Gemeinsame zweier sich kreuzenden Linien nennt man Punkt. Bei der letzten Auffafsung heifst der Punkt auch der Durchschnitt oder der Schnittpunkt beider Linien.

Man kann sich jede Linie durch Punkte in beliebig viele Teile zerlegt denken. Jeder neue Punkt, der auf einer bereits geteilten Linie angenommen wird, teilt eine einzige unter den bereits vorhandenen Teillinien.

Ein Punkt wird durch zwei sich kreuzende dünne Fäden oder feine Striche veranschaulicht.

Übungen zu § 4.

1. In wieviel Teile zerfällt eine Linie durch 3, 4, 5 auf ihr angenommene Punkte, 1) wenn die Linie unbegrenzt, 2) wenn die Linie begrenzt ist?

2. Um wieviel nimmt die Anzahl der Teillinien zu, wenn die Anzahl der angenommenen Punkte um 1 vermehrt wird?

3. In welcher Beziehung steht die Anzahl der Teillinien zur Anzahl der angenommenen Punkte, 1) wenn die betrachtete Linie unbegrenzt, 2) wenn sie begrenzt ist?

4. In wieviel Teile zerfällt eine begrenzte Fläche durch zwei Querlinien, 1) wenn beide begrenzt sind, und jede die andere in zwei Punkten schneidet, 2) wenn die eine Querlinie begrenzt, die andere unbegrenzt ist, und jede von der andern in zwei Punkten geschnitten wird?

5. In wieviel Teile zerfällt eine unbegrenzte Fläche durch drei Querlinien, wenn die beiden ersten sich nicht schneiden, aber von der dritten in je zwei Punkten geschnitten werden?

§ 5. Beziehungen der Raumgebilde.

1. Der Körper, die Fläche, die Linie und der Punkt heifsen Raumgebilde.

Ist von mehreren gleichartigen Raumgebilden die Rede, so müssen sie durch Namen unterschieden werden. Man pflegt jeden Punkt durch einen grossen lateinischen Buchstaben, jede Linie nach ihren Endpunkten oder durch einen kleinen lateinischen Buchstaben, jede Fläche nach Punkten auf ihrer Grenze oder nach einem ihrer Punkte aufserhalb

der Grenzlinie zu benennen. So spricht man beispielsweise von dem Punkte A, der Linie PQ, der Linie a, der Fläche ABC, der Fläche M.

2. Nimmt man auf der Linie AB zwei Punkte C und D an, so kann man auf der Teillinie CD wieder zwei Punkte annehmen, und man kann sich dies Verfahren ohne Ende fortgesetzt denken. Zwischen je zwei Punkten von AB, sie mögen so nahe beieinander liegen, wie man will, giebt es noch unzählig viele andere Punkte. Zu keinem Punkte der Linie kann ein unmittelbarer Nachbarpunkt angegeben werden: je zwei Punkte werden durch eine Teillinie getrennt, wie klein diese auch sein mag. Die Gesamtheit der Punkte von AB ist eine Menge von getrennten, die Gesamtheit der Teillinien von AB eine Menge von unter sich zusammenhängenden Gebilden. Die Linie AB trägt die Gesamtheit ihrer Punkte, aber sie wird gebildet durch die Gesamtheit ihrer Teillinien.

Wenn ein Punkt P sich von dem einen Endpunkte der Linie AB bis zu dem andern fortbewegt, ohne die Linie zu verlassen, so ist AB das Bild des von P durchlaufenen Weges; man sagt daher, der Punkt beschreibe bei seiner Bewegung die Linie AB. So kann man sich jede Linie durch einen Punkt beschrieben denken. Das Spinnorgan der sich von einem Baume herablassenden Raupe, die glühende Spitze eines rasch bewegten Streichholzes veranschaulichen Punkte, die durch ihre Bewegung eine Linie erzeugen.

3. Denkt man sich durch eine Fläche Querlinien gezogen oder durch einen Körper Querflächen gelegt, so führt die Betrachtung zu einem ähnlichen Ergebnis wie vorhin. Die Querlinien der Fläche und die Querflächen des Körpers sind getrennte Gebilde, die durch sie begrenzten Teilflächen, beziehungsweise Teilkörper, hängen zusammen. Die Fläche ist die Trägerin ihrer Querlinien und der Inbegriff ihrer Teilflächen; der Körper der Träger seiner Querflächen und der Inbegriff seiner Teilkörper.

Eine Linie, welche so über eine Fläche hingleitet, daſs während der Bewegung jeder Punkt der Linie auch der Fläche angehört, beschreibt die Fläche. Der dünne Draht, der ein Stück Seife durchschneidet, die Speiche eines in rascher Drehung befindlichen Rades versinnlichen die Erzeugung einer Fläche durch die Bewegung einer Linie. Wird

ein dünnes Stück Blech an einem Stabe befestigt und durch rasche Drehung des Stabes bewegt, so wird die Erzeugung eines Körpers durch die Bewegung einer Fläche zur Anschauung gebracht.

Übungen zu § 5.

1. Welches Raumgebilde kann eine Fläche mit einer Linie gemein haben, wenn von der Linie kein Teil in der Fläche liegt?

2. Welche Raumgebilde können drei Flächen gemeinschaftlich sein, wenn von keiner der drei Flächen ein Teil in einer der beiden andern liegt?

3. Man führe Beispiele an und stelle Vorrichtungen her, durch welche die Erzeugung einer Linie durch einen Punkt, die Erzeugung einer Fläche durch eine Linie, die Erzeugung eines Körpers durch eine Fläche zur Anschauung gebracht wird.

Zweites Kapitel.

Die Strecke und die ebene Fläche.

§ 6. Die Strecke.

1. Die gleichzeitige Vorstellung von zwei Punkten A und B führt unmittelbar zu dem Begriff ihrer kürzesten Entfernung, die kurzweg als ihr Abstand bezeichnet wird (Fig. 1).

Der Abstand zweier Punkte kann durch einen dünnen Faden versinnlicht werden, der zwischen beiden Punkten ausgestreckt wird. Die Linie, welche den Abstand zweier Punkte zur Anschauung bringt, wird daher Strecke genannt.

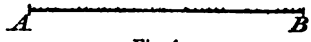


Fig. 1.

Unter den unzählig vielen Linien, die durch die gegebenen Punkte A und B begrenzt werden oder A mit B verbinden, ist die Strecke die kleinste; sie heifst deswegen auch die Verbindungslinie der beiden Punkte schlechthin.

Zwei Punkte bestimmen eine einzige Strecke.

Zur Veranschaulichung einer Strecke kann man sich der Kante eines Lineales bedienen. Dieses wird daher zum Zeichnen von Strecken gebraucht.

2. Wird auf der Strecke AB der Punkt C angenommen, (Fig. 2) so zerfällt AB in die Strecken AC und CB. Von jeder dieser Strecken sagt man, sie sei kleiner als AB, in Zeichen: $AC < AB$ und $CB < AB$. Umgekehrt wird AB gröfser als jede der Strecken AC und CB genannt, in Zeichen: $AB > AC$ und $AB > CB$.

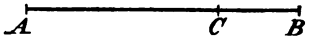


Fig. 2.

Man kann sich vorstellen, dass die Strecke AB von einem Punkte C beschrieben wird, der sich auf der Strecke

von A aus fortbewegt, bis er schliefslich sich mit B deckt. Für jede Zwischenlage des Punktes C ist $AC < AB$; in dem Augenblick, wo C mit B zusammenfällt, werden die Strecken AC und AB einander gleich, in Zeichen: $AC = AB$. Jeder Teil jeder der beiden Strecken deckt sich dann mit je einem einzigen Teile der andern, die beiden Strecken decken sich. Zwei Strecken, die nicht gleich sind, heifsen ungleich, in Zeichen $\neq$.

Wenn von zwei Strecken AB und CD keine die andere oder einen Teil der andern deckt, so können sie nicht unmittelbar verglichen werden. Man vergleicht dann die eine von ihnen mit einer dritten Strecke, welche der andern gleich gewählt wird. Ist diese dritte Strecke gleich AB, aber kleiner als CD, so ist auch $AB < CD$; ist die dritte Strecke gleich CD, so ist ebenfalls $AB = CD$; ist die dritte Strecke gröfser als CD, so ist auch $AB > CD$.

Zur Herstellung einer solchen dritten Strecke benutzt man den Zirkel, der soweit geöffnet wird, dafs die eine Spitze auf A und zugleich die andere auf B gesetzt werden kann: die Verbindungslinie der Zirkelspitzen ist dann der Strecke AB gleich. Setzt man nun bei unveränderter Zirkelöffnung die eine Spitze auf C, so sind drei Fälle möglich: entweder läfst sich die andere gleichzeitig auf D setzen, dann ist $AB = CD$ (Fig. 3);

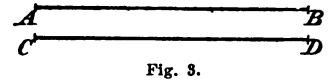


Fig. 3.

oder die zweite Spitze kann auf einen von D verschiedenen Punkt der Strecke CD gestellt werden, dann ist $AB < CD$ (Fig. 4);

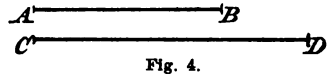


Fig. 4.

oder keine dieser beiden Möglichkeiten tritt ein, dann ist $AB > CD$ (Fig. 5).

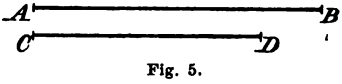


Fig. 5.

Je nachdem $AB = CD$ oder $AB \neq CD$ ist, sagt man, der Abstand der Punkte A und B sei dem der Punkte C und D gleich oder von diesem Abstande verschieden. Die Strecke ist daher das Mafs für den Abstand ihrer Endpunkte.

Eine Strecke PQ, welche gröfser als CD ist, z. B. die Kante eines hinreichend langen Lineales, kann stets so auf CD gelegt werden, dafs sie durch C und D in drei Teile

zerlegt wird. Der mittlere Teil ist die gegebene Strecke selbst, die beiden andern nennt man Verlängerungen von CD oder DC: der an C angrenzende Teil heifst Verlängerung von DC, den an D angrenzenden nennt man Verlängerung von CD. Eine Strecke verlängern heifst demnach: von einem ihrer Endpunkte aus eine zweite Strecke so ziehen, dafs beide eine einzige Strecke bilden.

In dem dritten der oben angeführten Fälle kann man die eine Zirkelspitze auf C und die andere gleichzeitig auf einen Punkt der Verlängerung von CD stellen.

Eine Linie, welche aus Strecken zusammengesetzt ist, ohne selbst eine Strecke zu sein, heifst gebrochene Linie. Linien, die weder Strecken noch gebrochene Linien sind, nennt man krumm.

3. Eine Linie AB sei durch einen biegsamen Draht dargestellt. Durch Umbiegen können die Endpunkte A und B, und von diesen aus fortgesetzt gleiche Teile von AB zur Deckung gebracht werden, bis sich schliefslich jedes Teilchen von AB mit je einem einzigen Teilchen der Linie AB deckt, und diese eine doppelt gelegte Strecke bildet. Ein beliebig auf AB gewählter Punkt liegt dann auf dem Punkte, dessen Abstand von B gleich seinem eigenen Abstande von A ist. Ein einziger Punkt deckt sich mit keinem andern, nämlich der gemeinschaftliche Grenzpunkt der zuletzt zur Deckung gebrachten Teilchen. Dieser Punkt teilt AB in zwei gleiche Teile und heifst deswegen der Mittelpunkt von AB (Fig. 6). Man kann also für jede Art von Linien den Satz aussprechen:

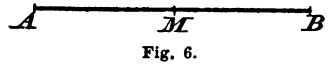


Fig. 6.

Jede Linie hat einen einzigen Mittelpunkt.

Übungen zu § 6.

1. Man vergleiche mit Hilfe des Zirkels jede der drei Strecken a, b und c mit jeder andern.

2. Wieviel Vergleichungen sind mindestens, wieviel höchstens erforderlich, um zu entscheiden, welche von drei gegebenen Strecken die kleinste, welche die grösste sei?

3. Wenn $a < c$ und $b > c$ ist, welche Beziehung besteht zwischen a und b?

4. Drei Strecken a, b und c zu zeichnen, so daſs $a > c > b$ ist.

5. Man suche auf der Oberfläche von Körpern Beispiele von Strecken, gebrochenen und krummen Linien.

6. Wenn auf der Strecke AB die Punkte P, Q, R und S angenommen werden, welche Strecken erscheinen verlängert, welche Strecken sind Verlängerungen von SR, und von welchen Strecken ist RS eine Verlängerung?

7. Eine einmal gebrochene Linie zu zeichnen, die kleiner als eine gegebene, dreimal gebrochene Linie ist.

8. Jede gebrochene Linie ist gröſser als die Strecke, die ihre Endpunkte verbindet.

9. Wieviel Strecken werden durch 3, 4, 5 Punkte bestimmt?

10. Nach welcher Regel kann man aus der Anzahl der gegebenen Punkte die Anzahl der durch sie bestimmten Strecken berechnen?

§ 7. Die Differenz und die Summe von Strecken.

1. Wenn zwei Strecken AB und CD gegeben sind, so ist es mit Hilfe des Zirkels und des Lineales immer möglich, eine dritte Strecke, die AB gleich ist, so zu legen, daſs sie mit CD einen Endpunkt gemein hat, und entweder sie selbst ein Teil von CD ist, oder CD ein Teil von ihr. Ist eine dieser Lagen hergestellt, so sagt man: AB ist auf CD abgetragen (Fig. 7).

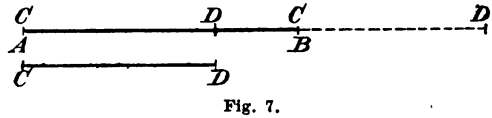


Fig. 7.

Mit Hilfe des Zirkels und des Lineales kann man die Strecke AB so verlängern, daſs ihre Verlängerung der Strecke CD gleich ist. Man sagt dann: CD ist auf der Verlängerung von AB abgetragen.

2. Ist a auf b oder b auf a abgetragen, so erscheint die grössere der beiden Strecken in zwei Teile geteilt, deren einer die kleinere selbst ist; der andere Teil heiſst die Differenz der gegebenen Strecken. Die Differenz ist also die

Strecke, um welche man die kleinere verlängern muſs, oder welche man um die kleinere verlängern muſs, um die gröſsere zu erhalten. Sie ist auch die Strecke, um welche man die gröſsere vermindern muſs, um die kleinere zu erhalten, und zugleich die Strecke, die man erhält, wenn man die gröſsere um die kleinere vermindert.

Das Abtragen einer Strecke auf einer andern bezeichnet man als eine Subtraktion beider. Die gröſsere der gegebenen Strecken heiſst Minuend, die kleinere Subtrahend. Ist a der Minuend, b der Subtrahend, so wird die Aufforderung zur Subtraktion durch $a - b$ (gelesen: a minus b), die Differenz selbst durch $(a - b)$ oder, wenn kein Miſsverständnis entstehen kann, ebenfalls durch $a - b$ ausgedrückt. Die Strecke $(a - b)$ giebt an, um wieviel b kleiner als a ist, sie selbst ist um b kleiner als a.

Die Differenz $(a - b)$ kann durch Abtragen von a auf b oder von b auf a erhalten werden, und zwar kann jede dieser Abtragungen auf zwei Arten erfolgen. Das Ergebnis einer Abtragung läſst jedoch nicht erkennen, auf welche Weise sie ausgeführt wurde. Wir werden somit zu der Annahme gezwungen, daſs alle Arten des Abtragens zu gleichen Differenzen führen. Man spricht dies in dem Satze aus: die Differenz ist ein eindeutiger Begriff.

Aus dem Begriff der Differenz ergiebt sich, daſs gleiche Strecken keine Differenz haben. Stellt man sich nun vor, daſs von den beiden Strecken a und b die kleinere wachse, so führt die Vergleichung beider zu dem Begriff der Differenz, wenn b den Wert a noch nicht erreicht oder diesen Wert schon überschritten hat, aber nicht, wenn b der Strecke a gleich geworden ist. Um diese Ausnahme zu beseitigen, stellt man für gleiche Strecken einen neuen Differenzbegriff auf: die Differenz gleicher Strecken wird durch Null ausgedrückt, in Zeichen: $a - b = 0$. Die Gleichungen $a - b = 0$ und $a = b$ sind also gleichbedeutend.

3. Wenn a auf der Verlängerung von b, oder b auf der Verlängerung von a abgetragen ist, so bilden die gegebenen Strecken eine neue Strecke, welche die Summe der gegebenen Summanden a und b heiſst und durch $(a + b)$ oder $(b + a)$ (gelesen: a plus b, b plus a) bezeichnet wird, je nachdem a um b, oder b um a verlängert wurde. Das Abtragen selbst nennt man eine Addition der Strecken, die Auf-

forderung dazu wird durch $a + b$, bezw. $b + a$, ausgedrückt. Ist ein Mifsverständnis ausgeschlossen, so wird auch die Summe selbst durch $a + b$, bezw. $b + a$, bezeichnet.

Jede der beiden Strecken a und b kann auf zwei Arten auf der Verlängerung der andern abgetragen werden, aber auch hier bietet die Anschauung keinen Anhalt, um aus dem Ergebnis des Abtragens die Art desselben zu erkennen. Wir werden daher wieder zu der Annahme gezwungen, dafs alle Arten des Abtragens zu gleichen Summen führen; in andern Worten: die Summe ist ein eindeutiger Begriff.

Wegen der Eindeutigkeit des Begriffes der Summe bezeichnen $a + b$ und $b + a$ gleiche Strecken, in Zeichen: $a + b = b + a$. Die Summe gegebener Strecken ist somit von der Reihenfolge ihrer Summanden unabhängig (Kommutationsgesetz). Die Strecke $a + b$ ist sowohl um b gröfser als a, als auch um a gröfser als b.

4. Ist auf der Verlängerung der Strecke $a + b$ die Strecke c abgetragen, so ist auch die Strecke $b + c$ auf der Verlängerung von a abgetragen. Die erhaltene Summe kann daher sowohl durch $(a + b) + c$, als auch durch $a + (b + c)$ bezeichnet werden, also ist: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Es ist demnach gleichgültig, ob man eine Summe oder einen ihrer Summanden um eine gegebene Strecke verlängert (Associationsgesetz).

Unter Berücksichtigung des Kommutationsgesetzes ersieht man aus der Gleichung $(a + b) + c = a + (b + c)$, dafs a mit b, aber auch b mit c vertauscht werden darf. Man schliefst daraus, dafs auch a mit c vertauschbar ist, und führt für die betrachtete Summe eine Schreibweise ein, die keine der gegebenen Strecken als vor der andern bevorzugt erscheinen lässt, nämlich $a + b + c$. So gelangt man zu dem Begriff einer Summe aus drei Strecken, für welche das Kommutationsgesetz gültig bleibt.

Durch Wiederholung der vorigen Betrachtung kann man zu dem Begriff einer Summe aus beliebig vielen Summanden übergehen und für jede solche Summe die Gültigkeit des Kommutationsgesetzes nachweisen.

5. Wenn man in einer Summe den ersten Summanden oder in einer Differenz den Minuenden um die Strecke x verlängert oder verkürzt, so ändert sich, wie die Anschauung lehrt, die Summe, bezw. die Differenz, in demselben Sinne

und um denselben Betrag, wie der erste Summand, bezw. der Minuend. Die Zeichensprache drückt dies durch folgende Gleichungen aus:

1. $(a + x) + b = (a + b) + x$ 2. $(a + x) - b = (a - b) + x$
3. $(a - x) + b = (a + b) - x$ 4. $(a - x) - b = (a - b) - x$.

Da die Ausdrücke durch Weglassung der Klammern ihre Bedeutung nicht ändern, so können die vorstehenden Gleichungen durch die folgenden ersetzt werden:

1. $a + x + b = a + b + x$ 2. $a + x - b = a - b + x$
3. $a - x + b = a + b - x$ 4. $a - x - b = a - b - x$.

Ist in einer Summe der erste Summand oder in einer Differenz der Minuend selbst eine Summe oder eine Differenz, so nennt man jene Summe, bezw. Differenz, ein Aggregat. Die Summanden, der Minuend und die Subtrahenden des Aggregates heifsen seine Glieder. Die vorstehenden Gleichungen sprechen somit die Gültigkeit des Kommutationsgesetzes für Aggregate aus.

Zeichnet man das Aggregat $a - b + b$, so erhält man die Strecke a. Eine Strecke, die in einem Aggregate als Summand und als Subtrahend auftritt, braucht demnach überhaupt nicht abgetragen zu werden. Ein Summand und ein Subtrahend, die das Abtragen gleicher Strecken vorschreiben, heifsen entgegengesetzte Glieder. Je zwei entgegengesetzte Glieder eines Aggregates heben sich also weg.

6. Wenn man in einer Summe den zweiten Summanden oder in einer Differenz den Subtrahenden um die Strecke x verlängert oder verkürzt, so ändert sich, wie die Anschauung lehrt, die Summe in demselben Sinne und um denselben Betrag, wie ihr zweiter Summand, die Differenz zwar auch um denselben Betrag, wie ihr Subtrahend, aber in entgegengesetztem Sinne. In der Zeichensprache lautet dies Ergebnis:

1. $a + (b + x) = a + b + x$ 2. $a - (b + x) = a - b - x$
3. $a + (b - x) = a + b - x$ 4. $a - (b - x) = a - b + x$.

Ein Summand, der selbst ein Aggregat ist, kann also durch seine eigenen Glieder ersetzt werden; ein Subtrahend, der die Form eines Aggregates hat, durch die Glieder, die seinen eigenen entgegengesetzt sind. Umgekehrt kann man auch Glieder eines Aggregates zu einem einzigen Summanden

zusammenfassen, die entgegengesetzten Glieder zu einem einzigen Subtrahenden.

7. Sind in einer Summe alle Summanden gleich, so nennt man die Summe ein Produkt; die Anzahl der Summanden heifst Multiplikator, der Summand selbst Multiplikand. Ein Produkt wird durch Nebeneinanderstellen des Multiplikators und des Multiplikanden ausgedrückt, z. B. $5a$, $8b$.

Wird die Zahl durch ein arabisches Zahlenzeichen, die Strecke durch einen Buchstaben bezeichnet, so braucht auf die Reihenfolge der Zeichen nicht geachtet zu werden. Wenn auch die Zahl durch einen Buchstaben ausgedrückt wird, so soll die Festsetzung getroffen werden, dafs der erste Buchstabe den Multiplikanden, der zweite den Multiplikator angiebt. Somit ist an eine Summe aus n Strecken, von denen jede gleich a ist.

Das Kommutationsgesetz lehrt, dafs die Summe $5a + 5b$ das Fünffache von $(a + b)$, und die Differenz $4a - 4b$ das Vierfache von $(a - b)$ ist, in Zeichen: $5a + 5b = 5(a + b)$ und $4a - 4b = 4(a - b)$. Ist n eine beliebige ganze Zahl, so ist allgemein: $an \pm bn = (a \pm b)n$.

Weiter sieht man unmittelbar ein, dafs $8a + 5a = 13a$ und $16a - 9a = 7a$ ist. Sind m und n ganze Zahlen, so ergiebt sich allgemein: $am \pm an = a(m \pm n)$.

Bezeichnet man den Multiplikator und den Multiplikanden als die Faktoren des Produktes, so können die vorstehenden Ergebnisse in folgender Regel zusammengefafst werden: Jedes Aggregat aus Produkten, die einen Faktor gemein haben, ist gleich dem Produkte aus dem gemeinschaftlichen Faktor und dem entsprechenden Aggregate der nicht gemeinschaftlichen Faktoren.

8. Die Aufgabe, eine Strecke x zu zeichnen, welche der Differenz der Strecken a und b gleich ist, kann durch die Gleichung $x = a - b$ ausgesprochen werden. Aus dem Begriff der Differenz ergiebt sich, dafs die Gleichung $x + b = a$ der Strecke x dieselbe Eigenschaft beilegt. Jede der beiden Gleichungen kann also die andere ersetzen. Wir erkennen somit, dafs jede Strecke der einen Seite einer Gleichung auf die andere gestellt werden darf, wofern man nur die Regel berücksichtigt: ein Subtrahend wird Summand, ein Summand wird Subtrahend. Unter Anwendung dieser Regel kann bei-

spielsweise die Gleichung $5a + 3x = 2x + a + 4b$ durch die folgende ersetzt werden: $x = 4b - 4a$. Letztere heifst eine nach x aufgelöste Gleichung; sie läfst unmittelbar erkennen, in welcher Weise x mit Hilfe der gegebenen Strecken a und b gezeichnet werden kann.

Übungen zu § 7.

1. Wenn man auf der Strecke AB die Punkte P, Q, R und S annimmt, welche Strecken der Zeichnung sind auf PQ, RB, AS, welche auf den Verlängerungen der genannten Strecken abgetragen?

2. Wenn man von den Endpunkten der Strecke AB aus auf der Strecke oder auf deren Verlängerungen die gleichen Strecken AC und BD abträgt, warum ist der Mittelpunkt von AB auch der Mittelpunkt von CD?

3. Man zeichne die Summe und die Differenz der Strecken a und b $(a > b)$ 1) durch Abtragen von a, 2) durch Abtragen von b.

4. Von der Summe und der Differenz der Strecken a und b soll sowohl die Summe als auch die Differenz gezeichnet werden. Man drücke beide Aufgaben in Zeichen aus.

5. In welcher Beziehung steht die in Aufgabe 4 gezeichnete Summe zu der gröfsern der gegebenen Strecken, und die gezeichnete Differenz zu der kleinern? Man löse die Aufgabe durch Zeichnen und durch Rechnen.

6. Folgende Summen und Differenzen zu zeichnen, wenn a, b, c, d gegebene Strecken sind:

1. $a - (b - c)$	2. $a + (b - c)$
3. $a - (b + c)$	4. $(a + b) - (c - d)$
5. $(a - b) + (c + b)$	6. $(a + b) + (c - b)$
7. $(a - b) + (b - c)$	8. $(a + b) - (b + c)$
9. $(a - c) - (b - c)$	10. $(a + b) - (a - c)$
11. $(5a + b) - (3a - b)$	12. $(2a - 3b) - (a - 2b)$
13. $(7b + 5a) + (3a + b)$	14. $(8a + 9b) - (3a + 4b)$
15. $(9a - 4b) - (2a + 3b)$	16. $(5a + 10b) + (3a - 2b)$
17. $(3b - 2a) + (6a + b)$	18. $(8b - 7a) + (9a - 10b)$.

7. Mit drei gegebenen Strecken soll man zwei verschiedene Aggregate zeichnen und jedes derselben auf dem andern und auf der Verlängerung des andern abtragen. Welche Beziehungen haben die erhaltenen Summen und Differenzen zu den gegebenen Strecken? Die verlangten Beziehungen sollen auch durch Rechnen gefunden werden.

8. Die Strecke x auf Grund folgender Gleichungen zu finden, wenn a, b und c gegebene Strecken sind:

1. $x + b = a$ 2. $x + a = b + c$
3. $x - a = b + c$ 4. $x - a = b - c$
5. $3x = 3a - 3b$ 6. $2x + a - b = 3a + b$
7. $5a + 10x = 4x + 11a$ 8. $7a - 3x = 7x - 3a$
9. $6a - 3b + 4x = 6x + 4a - b.$

§ 8. Die ebene Fläche.

Wenn man auf einer schwarzen Tafel zwei Punkte A und B annimmt und die Kante eines Lineales an diese Punkte anlegt, um ihre Verbindungslinie zu veranschaulichen, so kann man zwischen dem Lineale und der Tafel nicht hindurchsehen: die Verbindungslinie der angenommenen Punkte liegt also in der Tafelfläche. Wie man auch die Kante des Lineales der Tafelfläche anlegen mag, das Ergebnis bleibt stets dasselbe. Die Verbindungslinien von je zwei Punkten der Tafelfläche enthalten also nur Punkte, die auch der Fläche angehören.

Zieht man in der Tafelfläche irgend eine unbegrenzte Querlinie, so wird durch diese ein Teil F der Tafelfläche vollständig begrenzt. Legt man an zwei Punkte A und B dieser Fläche F die Kante eines Lineales an, so sind zwei Fälle möglich (Fig. 8): entweder schneidet die Strecke AB die Grenzlinie von F nicht, dann deckt sich jeder Punkt von AB mit je einem einzigen Punkte von F; oder AB schneidet die Grenzlinie von F, dann wird AB durch die Grenze in Abschnitte geteilt, so daſs auf dem einen von

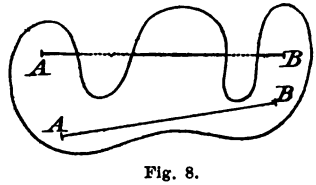


Fig. 8.

zwei benachbarten Abschnitten jeder Punkt zwischen den Grenzen des Abschnittes mit je einem einzigen Punkte von F zusammenfällt, auf dem andern Abschnitte kein einziger Punkt.

Man nennt eine Fläche eben, wenn jede Verbindungslinie von zwei Punkten derselben entweder nur Punkte enthält, die auch der Fläche angehören, oder durch die Grenze der Fläche so geteilt wird, daſs von zwei benachbarten Teilstrecken die eine zwischen ihren Endpunkten nur Punkte enthält, die sich mit je einem Punkte der Fläche decken, die andere keinen einzigen solchen Punkt.

Man denke an den Steinhauer, der durch Anlegen einer Latte die Stellen herausfindet, die er behauen muſs, um dem Steine eine ebene Grenzfläche zu geben.

Flächen, welche aus ebenen Flächen zusammengesetzt sind, ohne selbst eben zu sein, nennt man gebrochene Flächen; solche, die weder eben noch gebrochen sind, heiſsen gewölbt.

Übungen zu § 8.

1. Man führe Beispiele von ebenen, gebrochenen und gewölbten Flächen an.

2. Zu welchen Flächen gehören die Teile der Oberfläche eines Würfels, eines Kegels, einer Pyramide, eines Cylinders?

3. Zu welcher Art von Linien gehört die Schnittlinie von zwei ebenen Flächen?

4. Wie erkennt man, daſs auf der Oberfläche eines Kegels oder eines Cylinders Punkte liegen, deren Verbindungslinie der Oberfläche angehört?

5. Wenn die Schnittlinie zweier Flächen eine Strecke ist, kann man dann behaupten, daſs jede der Flächen eben sei?

6. Für wieviel Verbindungslinien von je zwei Punkten einer Fläche muſs man zeigen, daſs sie nicht in der Fläche liegen, um behaupten zu können, daſs die Fläche nicht eben sei?

7. Was kann über die Beschaffenheit zweier Flächen ausgesagt werden, die sich in einer krummen Linie schneiden?

Drittes Kapitel.

Die unendlichen Raumgebilde.

§ 9. Der Strahl und die Gerade.

1. Wenn man die Punkte A, B, C und D durch kleine Öffnungen in undurchsichtigen Schirmen versinnlicht und die drei ersten Schirme in der angegebenen Reihenfolge so aufstellt, daſs ein Auge von A aus durch alle drei Öffnungen zugleich hindurchsehen kann, so bilden die Strecken AB und BC eine einzige Strecke: BC ist also eine Verlängerung von AB.

Wird der vierte Schirm so zwischen B und C geschoben, daſs auch BD als Verlängerung von AB erscheint, so kann das Auge von A aus durch alle vier Öffnungen zugleich hindurchsehen, folglich ist von den beiden Strecken BC und BD die letztere ein Teil der erstern. Die Erfahrung lehrt also:

Zwei Verlängerungen einer Strecke über denselben Endpunkt hinaus decken sich ganz oder teilweise.

Die Verlängerung einer Strecke kann selbst wieder über ihren freien Endpunkt hinaus verlängert werden, beide Verlängerungen bilden zusammen eine Verlängerung der ursprünglichen Strecke. Wenn es nun auch in Wirklichkeit unausführbar ist, jede neue Verlängerung wieder zu verlängern, so kann man sich doch jede immer wieder verlängert denken, ohne daſs man je gezwungen wäre, eine weitere Verlängerung für undenkbar zu halten. Man kann sich also eine gegebene Strecke über jede Grenze hin-

aus oder, wie man sich auszudrücken pflegt, bis ins Unendliche verlängert denken. Die Strecke geht dann in eine Linie neuer Art über, welche Strahl genannt wird (Fig. 9).

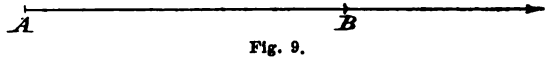


Fig. 9.

Während die Strecke vollständig begrenzt ist, ist der Strahl nur einseitig begrenzt; er erstreckt sich von seinem Ausgangspunkte, seinem Scheitel, aus bis ins Unendliche. Die Vergleichung eines Strahles und einer Strecke lehrt, dafs jener gröfser ist, als jede noch so grofs gedachte Strecke.

Da zwei Verlängerungen einer Strecke über denselben Endpunkt hinaus sich ganz oder teilweise decken, so fallen zwei Strahlen zusammen, wenn sie aufser dem Scheitel einen zweiten Punkt gemein haben.

Ein Strahl wird nach seinem Scheitel und einem willkürlich auf ihm angenommenen Punkte benannt.

2. Von jedem Punkte C der Strecke AB oder der Verlängerung von AB sagt man: C liegt von A aus in derselben Richtung wie B. Dieselbe Aussage gilt von jedem Punkte des Strahles AB. Punkte, die dem Strahle AB nicht angehören, liegen von A aus in Richtungen, die von der des Punktes B verschieden sind. Haben zwei verschiedene Strahlen denselben Scheitel, so liegen alle Punkte desselben Strahles von A aus in derselben Richtung, Punkte verschiedener Strahlen in verschiedenen Richtungen.

Richtungen sind keine Gröfsen, d. h. die eine von zwei Richtungen kann nicht als gröfser oder kleiner als die andere bezeichnet werden. Man kann deshalb auch nicht von dem Unterschiede zweier Richtungen sprechen, sondern nur von verschiedenen Richtungen, die von demselben Punkte ausgehen.

3. Eine Strecke kann über jeden Endpunkt hinaus bis ins Unendliche verlängert gedacht werden. Dadurch entstehen zwei Strahlen, denen beiden die gegebene Strecke angehört. Das erhaltene Gebilde kann aber auch als eine einzige Linie aufgefafst werden und heifst dann Gerade. Die Gerade ist vollständig unbegrenzt; sie wird nach zweien ihrer Punkte benannt (Fig. 10).

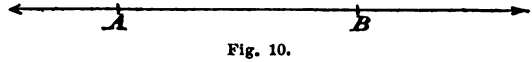


Fig. 10.

Aus einer gegebenen Strecke kann nur eine einzige Gerade erhalten werden. Haben zwei Gerade zwei Punkte gemein, so kann man sich beide aus der Verbindungslinie dieser Punkte entstanden denken. Somit ergeben sich die Sätze:

Zwei Punkte bestimmen eine einzige Gerade.

Zwei verschiedene Gerade haben höchstens einen Schnittpunkt.

Eine Gerade wird durch einen auf ihr angenommenen Punkt in zwei Strahlen geteilt. Die durch diese Strahlen bestimmten Richtungen heifsen entgegengesetzt. Die Gerade erstreckt sich nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche.

Übungen zu § 9.

1. In welche Gebilde zerfällt eine Strecke durch 2, 3, 4 auf ihr angenommene Punkte?

2. Um wieviel unterscheidet sich die Anzahl der auf einer Strecke angenommenen Punkte von der Anzahl ihrer Teilstrecken?

3. In welche Gebilde wird ein Strahl durch 2, 3, 4 auf ihm angenommene Punkte zerlegt?

4. In welcher Beziehung steht die Anzahl der auf einem Strahle angenommenen Punkte zu der Anzahl seiner Teilstrecken?

5. In welche Gebilde wird eine Gerade durch 2, 3, 4 auf ihr liegende Punkte geteilt?

6. Wie unterscheidet sich die Anzahl der auf einer Geraden angenommenen Punkte von der Anzahl ihrer Teilstrecken?

7. Wieviel Richtungen werden durch zwei Punkte bestimmt?

8. Wenn B und C von A aus in derselben Richtung liegen, von welchen Punkten aus liegen sie ebenfalls in derselben Richtung, und von welchen Punkten aus in entgegengesetzten Richtungen?

9. Wenn B und C von A aus in entgegengesetzten Richtungen liegen, von welchen Punkten aus liegen sie ebenfalls in entgegengesetzten Richtungen, und von welchen Punkten aus liegen sie in derselben Richtung?

10. Welche Gebilde können 1) zwei Strecken, 2) zwei Strahlen, 3) zwei Gerade miteinander gemein haben?

§ 10. Die Ebene und der Raum.

1. An einen Teil der Grenze einer ebenen Fläche kann man sich eine zweite ebene Fläche so angesetzt denken, daſs beide zusammen eine einzige ebene Fläche bilden. Man sagt dann, die erste ebene Fläche sei über jenen Teil ihrer Grenze hinaus ausgedehnt worden. Wird eine gegebene ebene Fläche über jeden Teil ihrer Grenze hinaus ausgedehnt, so entsteht eine neue ebene Fläche, die man sich wiederum über jeden Teil ihrer Grenze hinaus ausgedehnt denken kann. Dies Verfahren kann so oft wiederholt gedacht werden, wie man will, ohne daſs man je gezwungen wäre, eine weitere Ausdehnung über jeden Teil der neuen Grenze hinaus für undenkbar zu erklären. Jede ebene Fläche kann also über jede Grenze hinaus oder bis ins Unendliche ausgedehnt gedacht werden. Sie geht dann in ein neues Gebilde über, welches überhaupt keine Grenze mehr besitzt und Ebene genannt wird.

2. A und B seien zwei Punkte einer Ebene. In dieser kann durch eine Querlinie a eine ebene Fläche F so begrenzt werden, daſs die Strecke AB innerhalb F liegt, ohne jedoch von a geschnitten zu werden, und daſs jeder Punkt der Querlinie a von B einen Abstand hat, der gröſser als eine gegebene Strecke b ist.

Man stelle sich vor, daſs ein Punkt C sich auf der Linie a bewege, bis er zu seiner Anfangslage zurückgelangt, ohne irgend einen Teil von a mehr als einmal durchlaufen zu haben. In jeder Lage von C gehört die Strecke AC ganz der Ebene an. Während der Bewegung deckt sich jeder Punkt von F mindestens einmal mit einem Punkte von AC, also auch der Punkt B. Tritt diese Lage ein, so ist BC eine Verlängerung von AB. Denkt man sich AB um die Strecke b verlängert, so ist diese Verlängerung ein Teil von BC und liegt daher ebenfalls in der Ebene. Da man nun b so groſs wählen kann, wie man will, so ergiebt sich, daſs jede Verlängerung einer Strecke in derselben Ebene liegt, wie die Strecke selbst. Weiter folgt, daſs weder auf den aus der Strecke AB abgeleiteten Strahlen, noch auf der Geraden AB ein Punkt nachgewiesen werden kann, der auſserhalb der Ebene liegt, welcher die Strecke AB angehört. Demnach kann der Satz ausgesprochen werden:

Eine Gerade (eine Strecke, ein Strahl), die (der) zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt in der Ebene.

3. Jede Gerade der Ebene zerlegt diese in zwei Teile, welche Halbebenen genannt werden. Denkt man sich in der Ebene zwei sich schneidende Gerade (Fig. 11), so zerfällt

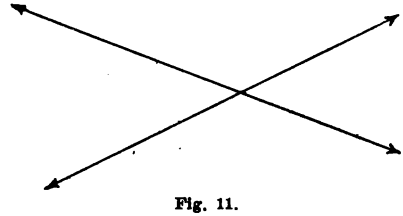


Fig. 11.

die Ebene in vier Teile, die Winkel heifsen. Ein Winkel ist demnach ein Teil der Ebene, der von zwei Strahlen mit gemeinschaftlichem Scheitel ausgeschnitten wird.

Da eine Gerade durch einen auf ihr angenommenen Punkt in zwei Strahlen zerfällt, so kann jede Halbebene als Winkel betrachtet werden. Auch die Ebene selbst kann als Winkel aufgefafst werden, wofern man nur einen doppelt gelegten Strahl in ihr annimmt.

4. Denkt man sich an einen Teil der Grenze eines Körpers einen zweiten so angefügt, dafs beide einen einzigen Körper bilden, so sagt man, der erste Körper sei über jenen Teil seiner Grenze hinaus vergröfsert worden. Wird ein Körper über jeden Teil seiner Grenze hinaus vergröfsert, so entsteht ein neuer Körper, den man sich wieder über jeden Teil seiner Grenze hinaus vergröfsert denken kann. Man darf sich dies Verfahren so oft wiederholt denken, wie man will, ohne je zu der Annahme gezwungen zu sein, dafs eine weitere Vergröfserung über jeden Teil der Grenze hinaus undenkbar sei. Ein Körper kann also über jede Grenze hinaus oder bis ins Unendliche vergröfsert gedacht werden; er geht dadurch in ein neues Gebilde über, welches der unendliche Raum oder der Raum genannt wird.

Jeder geometrische Körper ist ein Teil des Raumes, seine Oberfläche bildet die Grenze zwischen ihm und dem unendlichen Raume.

Übungen zu § 10.

1. In einer Ebene sind zwei Punkte A und B und zwei Gerade a und b gegeben: man soll auf a und b Punkte finden, die von A aus in derselben Richtung liegen wie B oder in der entgegengesetzten Richtung. Wieviel Fälle können je nach der Lage der gegebenen Gebilde unterschieden werden, und wieviel Punkte findet man höchstens?

2. Wieviel Schnittpunkte haben 3, 4, 5 Gerade einer Ebene, wenn jede Gerade von jeder andern geschnitten wird, und durch keinen Schnittpunkt mehr als zwei Gerade gehen?

3. Nach welcher Regel berechnet man die Anzahl der Schnittpunkte von gegebenen Geraden einer Ebene, wenn für diese Geraden die Voraussetzungen der Aufgabe 2 zutreffen?

4. Wenn in der Ebene eine bestimmte Anzahl von Geraden gegeben ist, und die Voraussetzungen der Aufgabe 2 zutreffen, um wieviel nimmt die Anzahl der Schnittpunkte zu, wenn man eine weitere Gerade in der Ebene annimmt, die jede der gegebenen schneidet, aber 1) durch keinen Schnittpunkt der gegebenen Geraden geht, oder 2) durch einen einzigen Schnittpunkt der gegebenen Geraden hindurchgeht, oder 3) zwei Schnittpunkte der gegebenen Geraden verbindet, ohne durch einen dritten Schnittpunkt derselben zu gehen?

5. Wenn für eine bestimmte Anzahl von Geraden einer Ebene die Voraussetzungen der Aufgabe 2 zutreffen, um wieviel nimmt die Anzahl der Schnittpunkte ab, 1) wenn eine Gerade weggelassen wird, 2) wenn zwei Gerade weggelassen werden?

6. Wenn zwei Ebenen zwei Punkte gemein haben, welches Gebilde haben sie aufserdem gemein?

7. Welches Gebilde hat eine Ebene mit einer Geraden gemein, die nicht in der Ebene liegt?

8. Wieviel Winkel werden durch zwei Strahlen einer Ebene bestimmt, die den Scheitel gemein haben?

9. Durch welche Gebilde kann man sich eine Ebene beschrieben denken?

10. Welche Gebilde kann eine Winkelfläche mit einer Geraden gemein haben?

Viertes Kapitel.

Die Kongruenz und die Gleichheit.

§ 11. Endliche Gebilde.

1. Führt man durch zwei aufeinander gelegte Blätter einen in sich zurücklaufenden Schnitt, so deckt sich bei den ausgeschnittenen Flächen jeder Teil jeder Fläche mit je einem einzigen Teile der andern. Von zwei solchen Flächen sagt man, zie seien zur Deckung gebracht, und man nennt sie kongruent.

Wird die eine der beiden kongruenten Flächen durch einen oder mehrere Schnitte zerlegt, und werden die Teilflächen durch Aneinanderlegen von Abschnitten ihrer Grenzen in anderer Weise als früher wieder zu einer einzigen Fläche zusammengesetzt, so kann im allgemeinen die neue Fläche nicht mehr mit der ungeteilten zur Deckung gebracht werden. Vielmehr giebt es nach dem Aufeinanderlegen beider Flächen in jeder von ihnen Teile, die nicht mit Teilen der andern zur Deckung gebracht sind. Beide Flächen sind also nicht mehr kongruent.

Zerlegt man die zusammengesetzte Fläche in die Teile, aus denen sie gebildet wurde, so können diese offenbar so auf die nicht geteilte Fläche gelegt werden, dafs wieder jeder Teil jeder Fläche mit je einem einzigen der andern zusammenfällt. Zwei Flächen, die in ihren Teilen zur Deckung gebracht werden können, heifsen gleich.

Kann die erste von zwei ebenen Flächen als Ganzes oder geteilt so auf die zweite gelegt werden, dafs jeder Teil der ersten sich mit je einem einzigen Teile der zweiten deckt,

aber in dieser Teile vorkommen, die nicht mit je einem einzigen Teile der ersten zur Deckung gebracht werden können, so nennt man die Flächen ungleich, und zwar die erste kleiner als die zweite, diese gröfser als jene.

Die Begriffe kongruent, gleich, ungleich, kleiner, gröfser finden sinngemäfse Anwendung auf geometrische Körper und Linien; bei Strecken decken sich die Begriffe kongruent und gleich.

Wenn man für die Flächen- und Liniengebilde, die sich nicht ins Unendliche erstrecken, die Bezeichnung endliche Gebilde einführt, so können die vorstehenden Ergebnisse in dem Satze ausgesprochen werden:

Kongruente endliche Gebilde sind gleich, gleiche Gebilde sind nicht notwendig kongruent, ungleiche sind nie kongruent.

Übungen zu § 11.

1. Mit Hilfe von biegsamen Drähten sollen 1) kongruente Linien, 2) gleiche, aber nicht kongruente Linien, 3) ungleiche Linien zur Anschauung gebracht werden.

2. Eine Strecke zu zeichnen, die einer gegebenen gebrochenen Linie gleich ist.

3. Zwei gleiche gebrochene Linien zu zeichnen, die nicht kongruent sind.

4. Zwei gegebene gebrochene Linien miteinander zu vergleichen.

5. Was hat man unter der Summe und unter der Differenz von zwei gebrochenen Linien zu verstehen? (Siehe Nr. 2).

6. Mit Hilfe von Blättern sollen 1) kongruente Flächen, 2) gleiche, aber nicht kongruente Flächen, 3) ungleiche Flächen veranschaulicht werden.

7. Wie kann man zwei kongruente gewölbte Flächen oder zwei Stoffkörper herstellen, denen kongruente geometrische Körper entsprechen?

§ 12. Unendliche Gebilde.

1. Zwei beliebige Strahlen SA und $S'A'$ kann man sich stets so gelegt denken, dafs S' mit S und A' mit einem Punkte von SA zusammenfällt. Dadurch sind beide Strahlen zur Deckung gebracht, folglich sind alle Strahlen kongruent.

Der Strahl SA wird durch A in die Strecke SA und einen Strahl zerlegt. Mit diesem kann der Strahl $S'A'$ zur Deckung gebracht werden. Folglich kann man sich die beiden Strahlen so gelegt denken, daſs jeder Teil von $S'A'$ mit je einem einzigen Teile des Strahles SA zusammenfällt, aber von diesem ein Teil, nämlich die Strecke SA, durch keinen Teil von $S'A'$ gedeckt wird.

Wollte man die Begriffe gleich und ungleich in dem vorhin festgesetzten Sinne auf die Strahlen anwenden, so müſste man sie in der ersten Lage als gleich, in der zweiten als ungleich bezeichnen.

2. Man kann sich zwei Gerade so gelegt denken, daſs sie zwei Punkte gemein haben, also zusammenfallen. Zwei Gerade sind daher kongruent.

Nimmt man auf der ersten Geraden die Punkte A und B, auf der andern A' und B' so an, daſs $AB < A'B'$ ist, so zerfällt jede Gerade in eine Strecke und zwei Strahlen. Die Geraden können also so geteilt werden, daſs durch Aufeinanderlegen ihrer Teile jeder Teil der ersten Geraden mit je einem einzigen der zweiten zusammenfällt, aber in der zweiten Geraden Teile vorhanden sind, die nicht durch Teile der ersten gedeckt werden.

Bei Anwendung der Begriffe gleich und ungleich in dem für endliche Gebilde festgesetzten Sinne würde man also zwei Gerade bald als gleich, bald als ungleich bezeichnen müssen.

3. Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich, daſs es nicht zulässig ist, Festsetzungen, die für endliche Gebilde getroffen wurden, ohne weiteres auf Gebilde zu übertragen, die sich ins Unendliche erstrecken.

Fünftes Kapitel.

Der Kreis und der Winkel.

§ 13. Der Kreis als Ort.

1. Jedes Gebilde, das in der Ebene liegt, kann in dieser verschoben gedacht werden, ohne daſs einer seiner Punkte die Ebene verläſst. Der Abstand von zwei auf dem Gebilde angenommenen Punkten bleibt bei der Verschiebung unverändert. Behält bei der Verschiebung ein Punkt des Gebildes seine Lage in der Ebene bei, so heiſst die Verschiebung eine Drehung um den festen Punkt.

Wenn eine Strecke AB oder a sich um den festen Endpunkt A dreht, so beschreibt der andere Endpunkt B eine Linie. Man kann die Drehung so lange fortsetzen, bis die Strecke in ihre Anfangslage, der Punkt B ebenfalls in seine Anfangslage zurückkehrt. Die von B bei der Drehung beschriebene Querlinie heiſst Kreislinie (Fig. 12). Der Punkt der Ebene, mit dem der feste Endpunkt der Strecke zusammenfällt, wird Mittelpunkt der Kreislinie genannt; den Abstand der Endpunkte der die Kreislinie erzeugenden Strecke nennt man Radius oder Halbmesser.

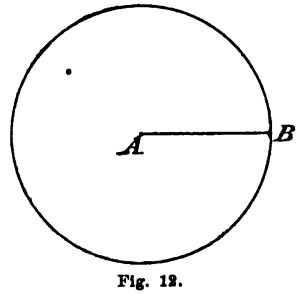


Fig. 12.

Durch die Kreislinie wird die Ebene in zwei Teile geteilt; der Teil, welchem der Mittelpunkt angehört, heiſst Kreisfläche. Statt der Ausdrücke Kreislinie und Kreisfläche gebraucht man den kürzern

Ausdruck Kreis, wenn keine Zweideutigkeit entstehen kann. Die Punkte der Kreisfläche, welche nicht auf deren Grenze liegen, nennt man Punkte innerhalb des Kreises; die Punkte, die weder der Kreisfläche noch der Kreislinie angehören, Punkte ausserhalb des Kreises; die Punkte der Kreislinie heifsen auch Punkte auf dem Kreise.

Zum Zeichnen des Kreises benutzt man den Zirkel. Der Kreis wird nach seinem Mittelpunkte benannt.

2. Jeder Punkt der Strecke AB, der zwischen A und B liegt, hat von A einen kleinern Abstand wie B, jeder Punkt auf der Verlängerung von AB einen gröfsern (Fig. 13). Bei der Drehung der Strecke um den festen Punkt A wird jeder Punkt P innerhalb des Kreises einmal durch einen Punkt von AB gedeckt, der zwischen A und B liegt; jeder Punkt Q auf dem Kreise durch B selbst; jeder Punkt R aufserhalb des Kreises durch einen Punkt auf der Verlängerung von AB.

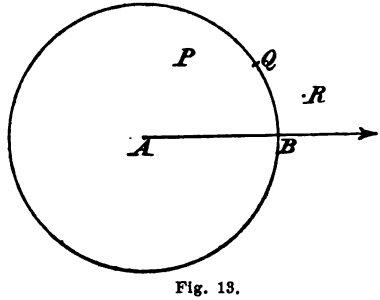


Fig. 13.

Nach ihrer Lage können die Punkte der Ebene in drei Gruppen eingeteilt werden: 1) die Gesamtheit der Punkte innerhalb des Kreises A, 2) die Gesamtheit der Punkte auf dem Kreise A, 3) die Gesamtheit der Punkte aufserhalb des Kreises A.

Nach ihrem Abstande vom Mittelpunkte des Kreises A kann man die Punkte der Ebene in die drei folgenden Gruppen einreihen: 1) die Gesamtheit der Punkte, deren Mittelpunktsabstand kleiner als a ist, 2) die Gesamtheit der Punkte, deren Mittelpunktsabstand gleich a ist, 3) die Gesamtheit der Punkte, deren Mittelpunktsabstand gröfser als a ist.

Die vorausgeschickte Betrachtung lehrt, dafs jeder Punkt irgend einer Gruppe bei der ersten Art der Einteilung auch ein Punkt der entsprechenden Gruppe bei der zweiten Art der Einteilung ist, und umgekehrt. Man sagt daher: jede Gruppe der ersten Art ist identisch mit der entsprechenden Gruppe der zweiten Art.

Wenn die Gesamtheit der Punkte einer Linie identisch ist mit der Gesamtheit der Punkte, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen (z. B. die Eigenschaft, von dem Punkte A den Abstand a zu haben), so nennt man jene Linie den geometrischen Ort oder den Ort für alle Punkte, denen die genannte Eigenschaft zukommt. Unter Benutzung dieses Begriffes ergiebt sich der Satz:

Der Ort für alle Punkte, die von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben, ist der Kreis um den gegebenen Punkt mit dem gegebenen Abstande als Radius.

3. Wenn von zwei Kreisen mit gleichen Radien der eine so verschoben gedacht wird, dafs sein Mittelpunkt mit dem des andern zusammenfällt, so decken sich auch die Kreislinien: Kreise mit gleichen Radien sind also kongruent und gleich.

Sind die Radien zweier Kreise ungleich, so ergiebt die Aufeinanderlegung beider Kreise bei gleichzeitiger Deckung ihrer Mittelpunkte, dafs die Kreisfläche mit dem kleinern Radius auch die kleinere ist. Umgekehrt hat die kleinere von zwei Kreisflächen auch den kleinern Radius.

Kongruente Kreise, die nicht zur Deckung gebracht sind, unterscheiden sich nur durch ihre Lage in der Ebene.

4. Sei r der Radius des Kreises M. Beschreibt man um den Punkt P innerhalb des Kreises M (Fig. 14), den Punkt Q

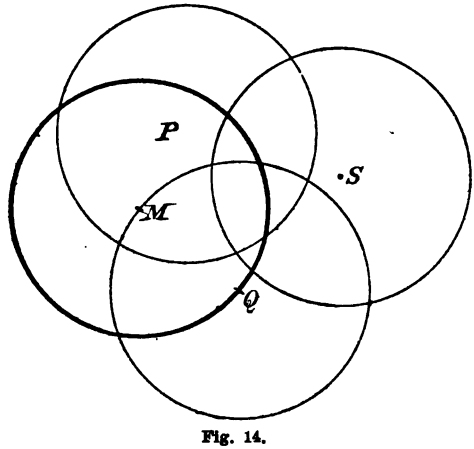


Fig. 14.

auf dem Kreise M, den Punkt S ausserhalb des Kreises M je einen Kreis mit dem Radius r, so liegt M innerhalb des Kreises P, auf dem Kreise Q und aufserhalb des Kreises S. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, die durch den Punkt M gehen, ist also identisch mit der Gesamtheit der Punkte auf dem Kreise M. Somit ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius, die durch einen gegebenen Punkt gehen, ist der Kreis um den gegebenen Punkt mit dem gegebenen Radius.

Übungen zu § 13.

1. Wieviel Punkte hat ein Kreis mit einem Strahle gemein, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Kreises ist?
2. Wieviel Punkte hat ein Kreis mit einer Geraden gemein, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht?
3. Wenn zwei Kreise denselben Mittelpunkt haben, was kann über den Mittelpunktsabstand der Punkte ausgesagt werden, die in der ringförmigen Fläche zwischen beiden Kreislinien liegen?
4. Punkte zu finden, die von dem gegebenen Punkte A den Abstand p und von dem gegebenen Punkte B den Abstand q haben.
5. Punkte zu finden, die von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben.
6. Auf einer gegebenen Geraden g oder auf einem gegebenen Kreise M Punkte zu finden, die von einem gegebenen Punkte den Abstand a haben.
7. Mit gegebenem Radius r einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden g oder auf einem gegebenen Kreise M liegt, und der durch einen gegebenen Punkt P geht.
8. Mit gegebenem Radius r einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte A und B geht.
9. Drei Punkte zu finden, von denen jeder von jedem andern den Abstand a hat.
10. Mit den gegebenen Radien a und b zwei sich in einem gegebenen Punkte schneidende Kreise so zu zeichnen, dafs der Abstand ihrer Schnittpunkte gleich der gegebenen Strecke c ist. Warum giebt es unzählig viele solcher Kreise?

11. Wenn man um die Schnittpunkte von zwei gleichen Kreisen Kreise beschreibt, die jenen gleich sind, in welchen Punkten schneiden sich die neuen Kreise?

12. Vier Punkte A, B, C, D so zu zeichnen, daſs $AB = BC = CD = CA = BD$ ist. Wieviel Kreise sind zur Lösung der Aufgabe erforderlich?

§ 14. Die Symmetrie des Kreises.

1. Wenn man durch den Mittelpunkt M eines Kreises eine Gerade zieht, so wird diese durch die Kreislinie in zwei Punkten A und B geschnitten, deren Abstand dem doppelten Radius gleich ist. Jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gelegte Gerade heiſst Durchmesser (Fig. 15).

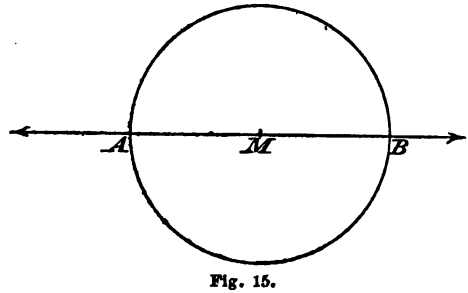


Fig. 15.

Spricht man von der Länge des Durchmessers, so meint man den Abstand der Durchmesserpunkte, die auf dem Kreise liegen, also den doppelten Radius. Jene Durchmesserpunkte nennt man daher auch die Endpunkte des Durchmessers.

Durch den Durchmesser AB wird die Kreislinie in zwei Teile geteilt, von denen jeder in seiner Halbebene der Ort für alle Punkte ist, deren Mittelpunktsabstand gleich dem Radius ist. Ähnlich wie ein Blatt eines offenen Heftes um die Rückenlinie gedreht und auf das Nachbarblatt gelegt werden kann, so kann auch jede Halbebene durch Drehung um die sie bestimmende Gerade mit der Halbebene, die durch dieselbe Gerade begrenzt wird, zur Deckung gebracht werden. Erfolgt das Zusammenklappen zweier Halbebenen um den Durchmesser eines Kreises, so liegen nach erfolgter Drehung beide Teile der Kreislinie in der-

selben Halbebene und bilden in dieser den Ort für alle Punkte, deren Mittelpunktsabstand gleich dem Radius ist. Da nun in keiner Halbebene die Gesamtheit dieser Punkte durch die Drehung geändert wurde, so decken sich nach dem Zusammenklappen der Halbebenen die beiden Teile der Kreislinie, also auch die beiden Teile der Kreisfläche. Die betrachteten Teile heifsen daher Halbkreise. Somit ergeben sich die Sätze:

Jeder Durchmesser teilt den Kreis in kongruente Teile.

Durch Zusammenklappen zweier Halbebenen um einen Kreisdurchmesser werden beide Halbkreise zur Deckung gebracht.

2. Jedes geometrische Gebilde und jede Gesamtheit von geometrischen Gebilden heifst Figur. Ist eine Figur derart beschaffen, dafs durch Drehung um eine bestimmte Gerade der Figur der eine Teil derselben mit dem andern zur Deckung gebracht wird, sobald die durch jene Gerade bestimmten Halbebenen zusammengeklappt werden, so sagt man: die Figur ist bezüglich jener Geraden symmetrisch, und die Gerade ist eine Achse der Figur. Unter Benutzung dieser Begriffe kann der zuletzt ausgesprochene Satz auch folgendermafsen ausgedrückt werden:

Der Kreis ist symmetrisch bezüglich jedes Durchmessers, und jeder Durchmesser ist eine Achse des Kreises.

Übungen zu § 14.

1. Eine halbierte Strecke, eine in 3, 4, 5 gleiche Teile geteilte Strecke zu zeichnen.
2. Welches ist die Achse von zwei gegebenen Kreisen?
3. Warum haben zwei Kreise im allgemeinen eine einzige Achse, und bei welcher Lage haben sie unendlich viele Achsen?
4. Wie müssen die Mittelpunkte von drei Kreisen liegen, damit diese eine symmetrische Figur bilden?
5. Wieviel Achsen besitzen zwei gleiche Kreise, die sich in zwei Punkten schneiden?
6. Mit gegebenem Radius r einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt A geht, und für den eine gegebene Gerade g eine Achse ist.

7. Mit gegebenen Radien a und b zwei Kreise zu zeichnen, die eine gegebene Gerade g zur Achse haben, und von denen der erste durch den gegebenen Punkt A, der zweite durch den gegebenen Punkt B geht.

8. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis so zu zeichnen, daſs zwei gegebene Gerade Achsen des Kreises werden.

9. Welcher Bedingung müssen drei Gerade genügen, wenn sie Achsen desselben Kreises sein sollen?

§ 15. Der Bogen, der Sektor und die Sehne.

1. Ein Teil einer Kreislinie heiſst Bogen. Ein Sektor oder Ausschnitt ist ein Teil der Kreisfläche, der durch zwei Radien und einen Bogen begrenzt wird. Die Grenzradien des Sektors nennt man seine Schenkel und den Mittelpunkt des Kreises den Scheitel des Sektors. Ein Sektor und der Bogen, der einen Teil der Grenze des Sektors bildet, heiſsen zusammengehörig.

Der Bogen wird nach seinen Endpunkten benannt; der Sektor, indem man die Bezeichnung für seinen Scheitel zwischen die Bezeichnungen für die Endpunkte des zugehörigen Bogens setzt. Der zu dem Bogen AB des Kreises M gehörige Sektor heiſst demnach: Sektor AMB (Fig. 16). Durch zwei Punkte A und B einer Kreislinie werden zwei Bogen bestimmt, von denen der eine im allgemeinen kleiner, der andere gröſser als ein Halbkreis ist. Wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird, so versteht man unter dem Bogen AB den kleinern der durch A und B begrenzten Bogen. Ebenso versteht man unter dem Sektor AMB den kleinern der beiden Sektoren, die durch die Radien MA und MB bestimmt werden.

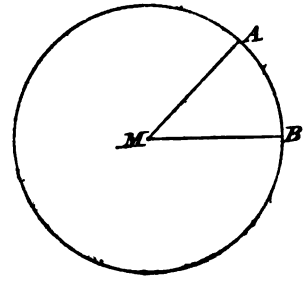


Fig. 16.

Von jedem Punkte einer Kreislinie aus kann man diese in zwei entgegengesetzten Richtungen durch einen Punkt durchlaufen denken. Zwei Bogen, die einen Endpunkt ge-

mein haben, können somit von dem gemeinschaftlichen Endpunkte aus in derselben oder in entgegengesetzten Richtungen liegen.

Den Radius kann man sich von einer gegebenen Anfangslage aus in zwei entgegengesetzten Richtungen gedreht denken. Dementsprechend liegen zwei Sektoren eines Kreises, die einen Schenkel gemein haben, von diesem aus in derselben Drehungsrichtung oder in entgegengesetzten Drehungsrichtungen.

2. Wenn zwei kongruente Kreise zur Deckung gebracht sind, so kann man sich den einen um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gedreht denken. Jeder Punkt dieser Kreislinie bewegt sich dann auf der festen, und jeder ihrer Punkte kann durch die Drehung mit jedem vorgeschriebenen Punkte der festen zur Deckung gebracht werden.

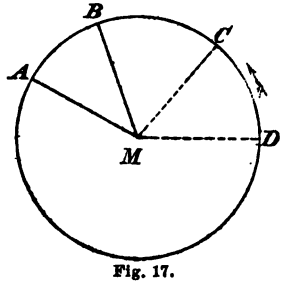


Fig. 17.

Ist AB ein Bogen des festen Kreises, CD ein Bogen des andern (Fig. 17), so kann dieser so gedreht werden, dafs beide einen gemeinschaftlichen Endpunkt erhalten und in derselben Richtung liegen. Wir nehmen an, die Punkte C nnd A seien zur Deckung gebracht. Wenn dann auch D mit B zusammenfällt, so sind beide Bogen kongruent und gleich. Deckt sich D nicht mit B, so ist $AB < CD$ oder $AB > CD$, je nachdem AB als ein Teil von CD, oder CD als ein Teil von AB erscheint. Das Ergebnis der Vergleichung der Bogen AB und CD überträgt sich ohne weiteres auf den Bogen des festen Kreises, welcher vor der Drehung durch CD gedeckt wurde, und auf die zu den Bogen AB und CD gehörigen Sektoren.

Man kann auch von den Sektoren AMB und CMD ausgehen und durch Drehung des einen Kreises erreichen, dafs beide Sektoren einen gemeinschaftlichen Schenkel erhalten und von diesem aus in derselben Drehungsrichtung liegen. Wir nehmen an, MC und MA seien zur Deckung gebracht. Fallen dann auch MB und MD zusammen, so sind beide Sektoren kongruent und gleich. Wenn MB und MD nicht zusammenfallen, so ist derjenige Sektor der kleinere,

welcher ganz durch den andern gedeckt wird, während in diesem Teile vorhanden sind, die nicht mit Teilen des ersten Sektors zur Deckung gebracht sind. Sind die Sektoren verglichen, so sind es auch die zugehörigen Bogen. Somit ergeben sich die Sätze:

Zu kongruenten Bogen desselben Kreises oder kongruenter Kreise gehören kongruente Sektoren, und zu kongruenten Sektoren kongruente Bogen.

Zu dem gröfsern von zwei Bogen desselben Kreises oder kongruenter Kreise gehört der gröfsere Sektor, und zu dem gröfsern Sektor der gröfsere Bogen.

3. Man beschreibe um M zwei Kreise mit ungleichen Radien, konzentrische Kreise, und ziehe von M aus zwei Strahlen. Zwei Sektoren, die in konzentrischen Kreisen von denselben Mittelpunktstrahlen begrenzt werden, und von denen der eine ein Teil des andern ist, heifsen entsprechend. Die zu entsprechenden Sektoren gehörigen Bogen heifsen ebenfalls entsprechend, und jeder Sektor heifst entsprechend dem Bogen, welcher zu dem entsprechenden Sektor gehört. Dann ergiebt sich sofort (Fig. 18):

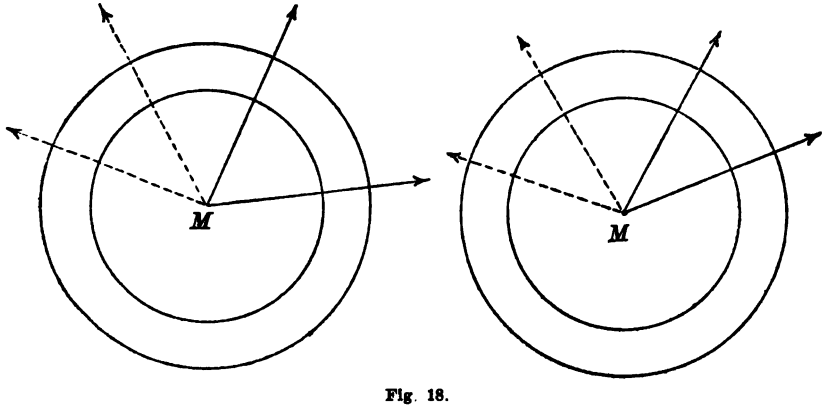


Fig. 18.

Kongruenten Bogen (Sektoren) eines Kreises entsprechen kongruente Bogen (Sektoren) in jedem konzentrischen Kreise.

Dem gröfsern von zwei Bogen (Sektoren) eines

Kreises entspricht der gröfsere Bogen (Sektor) in jedem konzentrischen Kreise.

Jeder Kreis kann so verschoben gedacht werden, dafs er mit einem gegebenen Kreise konzentrisch wird. Diejenigen Bogen (Sektoren), welche durch eine solche Verschiebung oder durch eine Drehung um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt ihrer Kreise in die Lage entsprechender Bogen (Sektoren) gebracht werden können, sollen ebenfalls entsprechend heifsen. Die vorigen Sätze bleiben für die neue Art von entsprechenden Bogen (Sektoren) bestehen.

4. Zwei Durchmesser $A\,C$ und $B\,D$ eines Kreises teilen diesen in vier Sektoren (Bogen) (Fig. 19). Zwei benachbarte

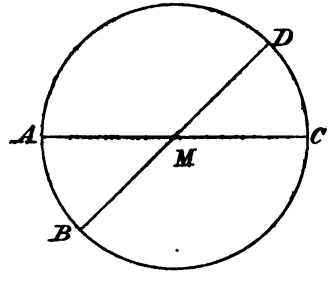


Fig. 19.

heifsen Nebensektoren (Nebenbogen), zwei nicht benachbarte Scheitelsektoren (Scheitelbogen). Man sieht unmittelbar die Richtigkeit des Satzes ein:

Nebensektoren (Nebenbogen) bilden zusammen einen Halbkreis.

Jeder der beiden Scheitelsektoren $A\,M\,B$ und $C\,M\,D$ bildet mit dem Sektor $A\,M\,D$ einen Halbkreis. Da beide Halbkreise gleich sind, so sind es auch ihre nicht gemeinschaftlichen Teile. So ergiebt sich der Satz:

Scheitelsektoren (Scheitelbogen) sind gleich.

5. Die Strecke, welche die Endpunkte eines Bogens verbindet, heifst die zu dem Bogen gehörige Sehne. Die Sehne, welche zu einem Bogen gehört, gehört auch zu dem zu dem Bogen gehörigen Sektor. Zur Unterscheidung des durch A und B begrenzten Bogens von der zugehörigen Sehne soll jener durch $\overset{\frown}{A\,B}$ bezeichnet werden.

Die Sehne AB des Kreises M ist der Abstand von zwei Punkten der Kreislinie. Da die Strecke AB kleiner als die gebrochene Linie AMB (Fig. 20), und diese gleich dem Durchmesser ist, so kann der Satz ausgesprochen werden:

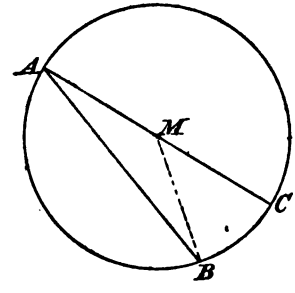


Fig. 20.

Der Durchmesser ist die gröfste Sehne des Kreises.

6. Wenn beim Vergleichen der Bogen AB und CD eines Kreises diese als gleich erkannt werden, so sind es auch die zugehörigen Sehnen. Somit gilt der Satz:

Zu gleichen Bogen (Sektoren) eines Kreises oder kongruenter Kreise gehören gleiche Sehnen.

Stellt sich heraus, dafs $\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{CD}$ ist, so kann zunächst über die zugehörigen Sehnen nichts ausgesagt werden, weil diese von A aus in verschiedenen Richtungen liegen. Es seien nun $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{AD}$ zwei von A aus in derselben Richtung liegende Bogen, und zwar $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AD}$ (Fig. 21). Da jede Linie einen Mittelpunkt besitzt, so hat auch der Bogen BD einen Mittelpunkt P. Der Durchmesser PM bestimmt zwei Halbebenen und zwei Halbkreise. Setzen wir voraus, dafs $\overset{\frown}{AD}$, also auch $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{BD}$, kleiner als ein Halbkreis ist, so liegen bezüglich der Geraden PM die Punkte B und D in verschiedenen Halbebenen, und A in der Halbebene des Punktes B.

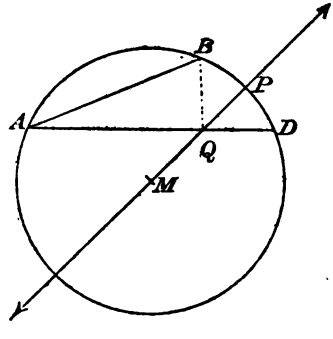


Fig. 21.

Die Sehne AD führt somit von einer Halbebene in die andere und schneidet daher die gemeinschaftliche Grenze beider, nämlich den Durchmesser MP. Sei Q der Schnittpunkt. Durch Zusammenklappen beider Halbebenen wird D mit B zur Deckung gebracht. Somit geht die Strecke

AD in die gebrochene Linie AQB über, welche gröfser als AB ist. Unter der Voraussetzung, dafs man sich auf Bogen (Sektoren) beschränkt, die kleiner als ein Halbkreis sind, kann also der Satz ausgesprochen werden:

Zu dem gröfsern von zwei Bogen (Sektoren) desselben Kreises oder kongruenter Kreise gehört die gröfsere Sehne.

Durch die Endpunkte einer Sehne werden zwei Bogen (Sektoren) bestimmt. Da der eine stets gröfser als ein Halbkreis ist, falls nicht etwa die Sehne ein Durchmesser des Kreises ist, so werden wir durch obige Einschränkung gezwungen, den kleinern Bogen (Sektor) als zu der Sehne gehörig zu bezeichnen.

7. Es seien AB nnd CD zwei Sehnen eines Kreises oder kongruenter Kreise.

Ist $AB = CD$, so mufs für die zugehörigen Bogen eine der drei folgenden Beziehungen gelten: entweder $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$, oder $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, oder $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$. Nach den bewiesenen Sätzen steht die zweite Beziehung allein im Einklang mit der über die Sehnen gemachten Annahme, dafs $AB = CD$ sei, folglich ist sie die zutreffende. Somit folgt:

Zu gleichen Sehnen eines Kreises oder kongruenter Kreise gehören gleiche Bogen (Sektoren).

Ist $AB > CD$, so mufs für die zugehörigen Bogen wieder eine der drei obigen Beziehungen gelten. Im vorliegenden Falle ist aber die letzte die einzige, die mit der über die Sehnen gemachten Voraussetzung im Einklang steht, folglich ist $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$. In Worten:

Zu der gröfsern von zwei Sehnen eines Kreises oder kongruenter Kreise gehört der gröfsere Bogen (Sektor).

Da man mit Hilfe des Zirkels gleiche Sehnen herstellen kann, so werden wir durch die vorstehenden Sätze in stand gesetzt, folgende Aufgaben zu lösen: 1) zu einem gegebenen Bogen (Sektor) in demselben oder in einem kongruenten Kreise einen kongruenten Bogen (Sektor) zu zeichnen, 2) zu einem gegebenen Bogen (Sektor) in einem beliebigen Kreise einen entsprechenden Bogen (Sektor) zu konstruieren.

In den Sätzen, welche über Bogen und Sehnen handeln, konnte wegen der über Bogen und Sektoren bewiesenen Sätze für den Bogen der zugehörige Sektor eintreten. Man kann aber die Sätze, welche die Beziehung von zwei Sektoren (Sehnen) auf die zugehörigen Sehnen (Sektoren) übertragen, auch ohne Zuhilfenahme der zugehörigen Bogen ableiten.

8. Wenn zwei Bogen (Sektoren) eines Kreises, die einen Endpunkt (Schenkel) gemein haben, in derselben Richtung (Drehungsrichtung) liegen, so zerfällt der gröfsere in zwei Teile, von denen der eine der kleinere selbst ist; der andere Teil heifst die Differenz der gegebenen Bogen (Sektoren).

Zwei Bogen (Sektoren) eines Kreises, die einen Endpunkt (Schenkel) gemein haben, aber in entgegengesetzten Richtungen (Drehungsrichtungen) liegen, bilden zusammen einen dritten Bogen (Sektor), der die Summe der gegebenen Bogen (Sektoren) heifst.

Wenn die Summe von zwei Bogen (Sektoren) einen Halbkreis beträgt, so nennt man jeden einen Supplementbogen (Supplementsektor) oder kürzer ein Supplement des andern. Wie mit Strecken, so kann man auch mit Bogen (Sektoren) Aggregate und Summen aus gleichen Summanden bilden. Letztere werden wieder Produkte genannt; der Multiplikand ist ein Bogen (Sektor), der Multiplikator eine ganze Zahl.

Bezeichnet man jeden Bogen (Sektor) durch einen einzigen Buchstaben, so kann die früher für Summen, Differenzen, Aggregate und Produkte eingeführte Zeichensprache ohne weiteres auf Bogen (Sektoren) übertragen werden. Dieselben Gesetze gelten hier wie dort. Damit man in jedem einzelnen Falle sofort erkennt, ob ein gegebener Ausdruck sich auf Strecken oder Bogen (Sektoren) bezieht, pflegt man Bogen (Sektoren) durch griechische Buchstaben zu bezeichnen. (Siehe auch § 42).

Übungen zu § 15.

1. In dem einen von zwei kongruenten Kreisen einen Bogen zu zeichnen, der von einem gegebenen Punkte begrenzt wird und einem gegebenen Bogen des andern Kreises gleich ist.

2. In dem Scheitel eines gegebenen Strahles soll an diesen ein Sektor angetragen werden, der einem gegebenen Sektor gleich ist.

3. Einen Bogen (Sektor) zu zeichnen, der in 2, 3, 4 gleiche Teile geteilt ist.

4. Zu einem gegebenen Bogen eines Kreises soll ein entsprechender Sektor gezeichnet werden.

5. In dem einen von zwei gegebenen Kreisen einen Bogen zu zeichnen, welcher einem gegebenen Sektor des andern Kreises entspricht und durch einen gegebenen Punkt begrenzt wird.

6. Warum gehört zu jedem Sektor eine Halbierungslinie? Welche Punkte verbindet sie?

7. Die Halbierungslinien von Nebensektoren (die Mittelpunkte von Nebenbogen) begrenzen den vierten Teil des Kreises.

8. Die Mittelpunkte von Scheitelbogen liegen mit dem Mittelpunkte des Kreises in einer Geraden. Welcher Satz kann über die Halbierungslinien von Scheitelsektoren ausgesprochen werden?

9. In einen gegebenen Kreis eine gegebene Strecke als Sehne einzutragen.

10. Gegeben ein Kreis M und ein Punkt P auf dem Kreise. Welcher Punkt der Kreislinie hat den gröfsten Abstand von P?

11. Von zwei gegebenen Bogen (Sektoren) eines Kreises die Summe und die Differenz zu zeichnen.

12. Von der Summe und der Differenz von zwei gegebenen Bogen (Sektoren) eines Kreises die Summe und die Differenz zu zeichnen. In welcher Beziehung steht die neue Summe zu dem gröfsern, und die neue Differenz zu dem kleinern der gegebenen Bogen (Sektoren)?

13. Gegeben zwei gleiche Kreise P und Q, in dem erstern ein Bogen $\overset{\frown}{AB}$. Es soll in dem Kreise Q zu $\overset{\frown}{AB}$ ein Supplementbogen gezeichnet werden, der durch den gegebenen Punkt C begrenzt wird.

14. In einem Punkte einer gegebenen Geraden soll an diese das Supplement eines gegebenen Sektors angetragen werden.

15. Gegeben zwei Kreise P und Q, in dem erstern ein Bogen $\overset{\frown}{AB}$ (Sektor APB). In dem Kreise Q einen Bogen (Sektor) zu zeichnen, der dem Nebenbogen von $\overset{\frown}{AB}$ (Nebensektor von APB) entspricht.

16. Wenn von zwei Bogen (Sektoren) eines Kreises jeder gröfser als ein Halbkreis ist, so gehört zu dem gröfsern Bogen die kleinere Sehne.

17. Wenn man von den zwei Bogen, die durch die Endpunkte einer Sehne bestimmt werden, den gröfsern als den zu der Sehne gehörigen Bogen bezeichnet, so gehört zu der gröfsern von zwei Sehnen der kleinere Bogen.

18. Die Sätze, welche die Beziehungen von zwei Sektoren auf die zugehörigen Sehnen übertragen, sollen ohne Zuhilfenahme der zugehörigen Bogen bewiesen werden.

19. Die Aufgaben in § 7 No. 6, 7, 8 unter der Annahme zu lösen, dafs die Strecken durch Bogen ersetzt werden.

§ 16. Der Winkel.

1. Von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte M zweier konzentrischen Kreise aus ziehe man zwei Strahlen, die die entsprechenden Sektoren AMB und $A'MB'$ ausschneiden (Fig. 22). Zur bequemern Unterscheidung sollen die Kreise beziehungsweise durch M und M' bezeichnet werden.

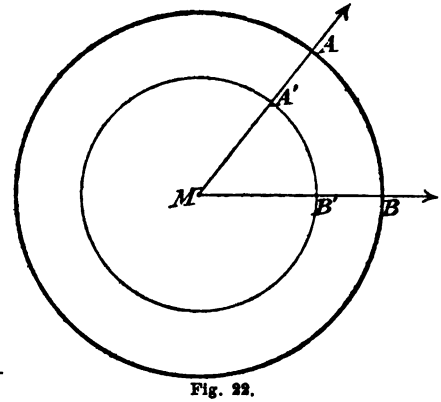


Fig. 22.

Läfst man den Radius von M' über jeden noch so klein gedachten Wert hinaus abnehmen und dann wachsen, bis er den Radius des festen Kreises M erreicht, so wird beim Wachsen des Kreises M' jeder Punkt innerhalb M ein einziges Mal durch einen Punkt der Kreislinie M', und jeder Punkt innerhalb des Sektors AMB ein einziges Mal

durch einen Punkt des Bogens $A'B'$ gedeckt. Man kann sich also jeden Kreis M durch eine Kreislinie und jeden Sektor AMB jenes Kreises durch einen Bogen beschrieben denken, wenn man annimmt, dafs der Radius von einem Werte aus, der kleiner als jede noch so klein gedachte Strecke ist, wachse, bis er den Radius des gegebenen Kreises erreicht. Läfst man den Radius des Kreises M' weiter wachsen, bis er jede noch so grofs gedachte Strecke übertrifft, so kann man weder in der Ebene noch in der Winkelfläche AMB einen Punkt nachweisen, der nicht durch einen Punkt der Kreislinie M', beziehungsweise des Bogens $A'B'$, gedeckt worden wäre. Die Ebene und einen gegebenen Winkel kann man sich also in ähnlicher Weise beschrieben denken, wie einen Kreis und einen seiner Sektoren. Wir entnehmen hieraus die Berechtigung, die Ebene als einen Kreis von unendlich grofsem Radius und jeden Winkel der Ebene als einen Sektor dieses Kreises zu betrachten.

Der Winkel wird in derselben Weise wie der Sektor bezeichnet, aber unter Vorsetzung des Zeichens $\sphericalangle$.

2. Die vorstehende Auffassung der Ebene und des Winkels nötigt uns, den betrachteten Winkel und den Sektor AMB als entsprechende Sektoren in konzentrischen Kreisen zu betrachten. Die Sätze über Sektoren gelten, ihre Radien mögen so grofs oder so klein sein, wie man will; doch kann, wie aus § 12, 3 hervorgeht, nicht ohne weiteres gefolgert werden, dafs sie giltig bleiben, wenn von zwei entsprechenden Sektoren der eine sich ins Unendliche erstreckt. Wir machen daher die **Annahme**, dafs die Sätze über Sektoren ihre Giltigkeit behalten, wenn die Schenkel der Sektoren jeden noch so grofs gedachten Wert übertreffen, d. h. wenn die Sektoren in Winkel übergehen. Dieser Annahme gemäss übertragen wir die über Sektoren aufgestellten Erklärungen und Sätze in folgender Weise auf Winkel:

Die Grenzstrahlen des Winkels nennt man seine Schenkel, ihren gemeinschaftlichen Scheitel den Scheitel des Winkels.

Ein Winkel, der Sektor und der Bogen, die in einem Kreise um den Scheitel des Winkels durch die Winkelfläche gedeckt werden, heifsen entsprechend.

Unter dem Winkel zweier Strahlen versteht man, wenn

nicht ausdrücklich eine andere Festsetzung getroffen wird, denjenigen, welcher einem Bogen entspricht, der kleiner als ein Halbkreis ist.

Zwei Gerade der Ebene teilen diese in vier Winkel: zwei benachbarte heifsen Nebenwinkel, zwei nicht benachbarte nennt man Scheitelwinkel.

Die Differenz (die Summe) zweier Winkel ist der Winkel, welcher der Differenz (der Summe) der Sektoren entspricht, die den gegebenen Winkeln entsprechen.

Winkel, deren Summe eine Halbebene beträgt, heifsen Supplementwinkel.

Kongruenten Bogen (Sektoren) desselben Kreises oder kongruenter Kreise entsprechen kongruente Winkel.

Dem gröfsern von zwei Bogen (Sektoren) desselben Kreises oder kongruenter Kreise entspricht der gröfsere Winkel, und dem gröfsern von zwei Winkeln der gröfsere Bogen (Sektor) eines Kreises. Entsprechenden Bogen (Sektoren) zweier Kreise entsprechen kongruente Winkel, und kongruenten Winkeln entsprechen entsprechende Bogen (Sektoren) zweier Kreise.

Je zwei Halbebenen sind kongruent.

Nebenwinkel sind Supplementwinkel, und Scheitelwinkel sind kongruent.

Die Konstruktionen von Winkeln werden durch die Konstruktionen von entsprechenden Bogen (Sektoren) ersetzt.

Wir fügen noch folgende Erklärungen hinzu:

Wenn zwei Strecken a und b einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, so versteht man unter dem Zeichen $\sphericalangle(a\,b)$ den Winkel zwischen den durch die Strecken bestimmten Strahlen.

Winkel werden wie Bogen (Sektoren) auch durch griechische Buchstaben bezeichnet. Die Ausdrücke, welche Winkel enthalten, (Summen, Differenzen, Aggregate, Produkte) unterliegen denselben Gesetzen, wie die entsprechenden Ausdrücke für Sektoren (Bogen).

Die Halbebene nennt man auch einen flachen oder gestreckten Winkel.

Ein Winkel, der einem Viertelkreise entspricht, heifst ein rechter Winkel oder ein Rechter und wird durch R bezeichnet. Von der Halbebene sagt man daher, sie betrage zwei Rechte.

Winkel, die kleiner als ein Rechter sind, heifsen spitz; solche, die gröfser als ein Rechter, aber kleiner als zwei Rechte sind, stumpf; Winkel, die eine Halbebene übertreffen, nennt man überstumpf.

3. Jeder Bogen AB hat einen einzigen Mittelpunkt. Der Mittelpunktstrahl, der durch den Mittelpunkt von $\overset{\frown}{AB}$ geht, halbiert sowohl den Sektor AMB als auch den entsprechenden Winkel (Fig. 23). Somit ergiebt sich der Satz:

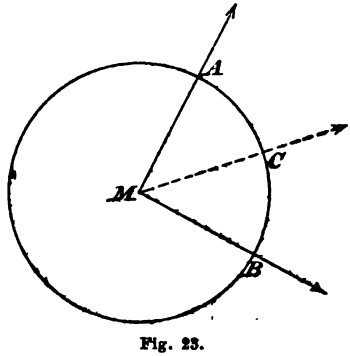


Fig. 23.

Jeder Winkel hat eine einzige Halbierungslinie.

Wenn $\sphericalangle AMB$ ein gestreckter ist, so wird er durch seine Halbierungslinie in zwei Rechte geteilt, und die Nebenwinkel dieser sind ebenfalls Rechte. Von zwei Geraden, die rechte Winkel einschliefsen, sagt man, dafs sie senkrecht aufeinander stehen; jede von ihnen heifst ein Lot oder eine Senkrechte zu der andern. Aus dem vorigen Satze ergiebt sich daher der folgende:

In jedem Punkte einer Geraden giebt es ein einziges Lot zu der Geraden.

Die Gerade, die einen Winkel halbiert, bestimmt zwei Halbebenen. Durch Zusammenklappen derselben werden die Schenkel des Winkels zur Deckung gebracht. Daher die Sätze:

Die Halbierungslinie eines Winkels ist eine Achse des Winkels, und die Schenkel eines Winkels bilden mit dessen Halbierungslinie eine symmetrische Figur.

Von zwei Geraden, die aufeinander senkrecht stehen, ist jede eine Achse der andern.

Wenn zwei Strecken oder Strahlen Teile von zueinander senkrechten Geraden sind, so sagt man auch von ihnen, dafs sie aufeinander senkrecht stehen.

4. Durch Zusammenklappen der beiden Halbebenen, die durch die Achse einer symmetrischen Figur bestimmt werden, wird jede Linie, die in der einen Halbebene der

Figur angehört, mit einer Linie der andern Halbebene zur Deckung gebracht, welche ebenfalls der Figur angehört. Zwei solche Linien heifsen symmetrisch. Wenn zwei Linien einer symmetrischen Figur sich aufserhalb der Achse in der einen Halbebene schneiden, so schneiden sich die zu ihnen symmetrischen Linien ebenfalls aufserhalb der Achse in der andern Halbebene.

Denkt man sich in jedem der Punkte A und B der Geraden PQ das Lot errichtet (Fig. 24), so ist PQ eine Achse der Figur. Da die beiden Senkrechten AC und BD sich nicht auf der Achse schneiden, so mufs von zwei Annahmen, die über die beiden Lote gemacht werden können, die eine zutreffen: entweder schneiden sie sich in einem einzigen Punkte aufserhalb der Achse, oder sie schneiden sich überhaupt nicht.

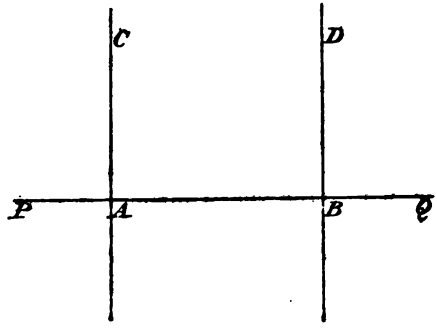


Fig. 24.

Jedes der beiden Lote zerfällt in zwei symmetrische Strahlen. Schnitten sich die Strahlen der einen Halbebene, so würden sich die zu ihnen symmetrischen Strahlen der andern Halbebene ebenfalls schneiden. Die beiden Lote würden also zwei gemeinschaftliche Punkte haben, mithin zusammenfallen, was zu der Voraussetzung, dafs es zwei verschiedene Gerade sind, in Widerspruch steht. Es ist demnach nicht möglich, dafs die betrachteten Lote einen einzigen Schnittpunkt haben. Da die erste Annahme hinfällig ist, so ist die zweite die zutreffende.

Wenn man zwei Gerade einer Ebene, die sich nicht schneiden, als parallel bezeichnet, so kann also der Satz ausgesprochen werden:

Zwei Gerade, die auf derselben dritten senkrecht stehen, sind parallel.

5. Das Stück der Ebene, welches von zwei Parallelen begrenzt wird, heifst Streifen.

Die Parallelen AC und BD (Fig. 24) bestimmen vier Halbebenen, von denen zwei den Punkt P enthalten. Die durch AC begrenzte Halbebene P deckt nur einen Teil der durch BD bestimmten Halbebene P, der Streifen bleibt ungedeckt. Nach der für endliche Gebilde geltenden Festsetzung (§ 11) müfste daher jene als die kleinere, diese als die gröfsere bezeichnet werden. Andererseits sind je zwei Halbebenen kongruent. Die für endliche Gebilde geltende Festsetzung würde daher verlangen, dafs beide Halbebenen als gleich betrachtet werden. Zu demselben Ergebnis wie bei den Halbebenen gelangt man durch Vergleichen der Winkel CAP und DBP.

Da nach unserer Auffassung des Winkels kongruente Winkel als kongruente Sektoren zu betrachten sind, so werden wir durch die Annahme in § 16, 2 gezwungen, je zwei kongruente Winkel, also auch je zwei Halbebenen und je zwei rechte Winkel als gleich zu bezeichnen. Wir müssen daher den Grundsatz aufstellen:

Beim Vergleichen der Winkel bleiben Streifen und Streifenhälften aufser Betracht.

Sind nun zwei Gerade AC und BD parallel, und ist PQ senkrecht zu AC (Fig. 24), so unterscheiden sich die Winkel CAP und DBP um eine Streifenhälfte. Beide sind daher gleich, und wir erhalten den Satz:

Jedes Lot zu einer von zwei Parallelen steht auch auf der andern senkrecht.

Übungen zu § 16.

1. Einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

2. Einen Winkel zu zeichnen, der durch einen gegebenen Strahl halbiert wird.

3. Einen Winkel zu zeichnen, der durch zwei gegebene Strahlen mit gemeinschaftlichem Scheitel in drei gleiche Teile geteilt wird.

4. An einen gegebenen Strahl in seinem Scheitel das Supplement eines gegebenen Winkels anzutragen. Wieviel Lösungen hat die Aufgabe, und durch welche weitere Bestimmung wird sie eindeutig?

5. Die Summe und die Differenz von zwei gegebenen Winkeln zu zeichnen.

6. Von der Summe und der Differenz zweier gegebener Winkel die Summe und die Differenz zu zeichnen. Welche Beziehung hat die neue Differenz zu dem kleinern, und die neue Summe zu dem gröfsern der gegebenen Winkel?

7. An einen gegebenen Strahl in dem Scheitel einen Winkel anzutragen, der ein Vielfaches eines gegebenen Winkels ist.

8. Wieviel Rechten ist die Ebene gleich, und welche Beziehung mufs zwischen Nebenwinkeln bestehen, damit jeder ein Rechter sei?

9. Jeder von zwei Nebenwinkeln soll mit einem Rechten verglichen werden. Zwei Nebenwinkel können stets durch eine Summe und eine Differenz ausgedrückt werden, von denen die ersten Glieder gleich, die zweiten entgegengesetzt sind.

10. Zu welcher Art von Winkeln gehört der Nebenwinkel 1) eines stumpfen, 2) eines rechten, 3) eines spitzen Winkels?

11. Zu welcher Art von Winkeln gehört der, der 1) einen spitzen, 2) einen stumpfen, 3) einen überstumpfen zu einer Ebene ergänzt?

12) Welcher Winkel wird von den Halbierungslinien zweier Nebenwinkel eingeschlossen? Welcher Satz spricht die Beziehung solcher Halbierungslinien aus?

13. Welche Lage haben die Halbierungslinien von Scheitelwinkeln?

14. Wenn ein halbierter Winkel mit einem Lote auf der Halbierungslinie gegeben ist, welches ist die Achse der Figur? Welche Strecken und Winkel der Figur sind kongruent?

15. Wieviel Achsen haben zwei sich schneidende Gerade?

16. Wenn eine Gerade auf dem Durchmesser eines Kreises senkrecht steht, welches ist die Achse der Figur? Welche Strecken und welche Winkel der Figur sind gleich, wenn jene Gerade von dem Kreise geschnitten wird?

17. Unter welcher Bedingung bilden ein Kreis und ein Winkel oder ein Kreis und zwei zu einander senkrechte Gerade eine symmetrische Figur?

18. Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und die nicht gemeinschaftlichen Schenkel aufeinander senkrecht stehen, wie grofs ist der Winkel zwischen den Halbierungslinien jener Winkel?

19. Die Aufgaben in § 7, No. 6, 7, 8 unter der Voraussetzung zu lösen, dafs die Strecken durch Winkel ersetzt werden.

Sechstes Kapitel.

Der geometrische Lehrsatz.

§ 17. Die Normalform, die Umkehrung und der indirekte Beweis.

1. Wenn man um den Scheitel M eines halbierten Winkels einen Kreis beschreibt (Fig. 25), so schneidet dieser die Schenkel in zwei Punkten B und C, die von dem Scheitel gleiche Abstände haben. Ist A ein beliebig angenommener Punkt auf der Halbierungslinie des Winkels, so ist die Gerade MA sowohl für den Kreis als auch für den Winkel eine Achse. Durch Zusammenklappen der durch MA bestimmten Halbebenen werden also sowohl die beiden Halbkreise als auch die Schenkel des Winkels zur Deckung gebracht. Der Punkt B, der in seiner Halbebene der einzige Schnittpunkt des einen Halbkreises und des einen Schenkels ist, fällt also beim Zusammenklappen mit dem Punkte C zusammen, welcher ebenfalls in seiner Halbebene der einzige Punkt ist, den der zweite Halbkreis und der zweite Schenkel gemein haben. Als Punkte der Achse bleiben A und M bei der Drehung der einen Halbebene in ihrer Lage. Mithin

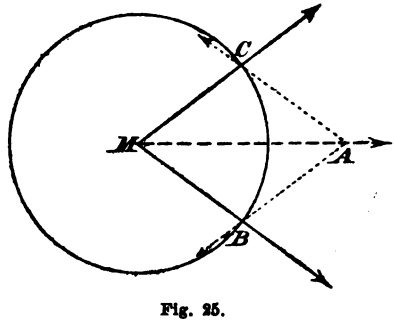


Fig. 25.

decken sich auch die Strahlen AB und AC, sowie die Winkel BAM und CAM.

Durch die Herstellung der Figur wurden dieser folgende Eigenschaften beigelegt: zwei Strahlen verbinden einen Punkt der Halbierungslinie mit Punkten der Schenkel, die von dem Scheitel gleiche Abstände haben. Wir erkennen nachträglich, daſs ihr mit Notwendigkeit auch noch folgende Eigenschaft zukommt: der Winkel der genannten Strahlen wird durch die Halbierungslinie des gegebenen Winkels halbiert.

Die Gesamtheit der Eigenschaften, die einer Figur bei ihrer Herstellung beigelegt werden, heiſst die Voraussetzung; die Gesamtheit der Eigenschaften, welche in einer Figur nach ihrer Herstellung entdeckt werden, nennt man die Folgerung. Die Voraussetzung und die Folgerung können zu einem Satzgefüge vereinigt werden, welches aus einem die Voraussetzung enthaltenden Bedingungsatze und einem die Folgerung aussprechenden Hauptsatze besteht. Ein solches Satzgefüge heiſst die Normalform des geometrischen Lehrsatzes.

Der in Rede stehende Lehrsatz würde etwa lauten: Wenn zwei Strahlen einen Punkt der Halbierungslinie eines Winkels mit zwei Punkten der Schenkel verbinden, die von dem Scheitel gleiche Abstände haben, so wird der von jenen Strahlen eingeschlossene Winkel durch die Halbierungslinie des gegebenen Winkels halbiert.

Da der Hauptsatz des Satzgefüges stets eine Behauptung enthält, so wird die Folgerung auch Behauptung genannt.

2. Unter den früher bewiesenen Sätzen finden wir folgende:

Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen.

Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bogen.

In der Normalform lauten sie:

Wenn zwei Bogen eines Kreises gleich sind, so sind auch die zugehörigen Sehnen gleich.

Wenn zwei Sehnen eines Kreises gleich sind, so sind auch die zugehörigen Bogen gleich.

Aus der Normalform der beiden Sätze ersieht man, daſs die Voraussetzung des ersten Satzes die Behauptung des zweiten, und die Behauptung des ersten die Voraussetzung des zweiten ist.

Wenn von zwei Sätzen der eine aus dem andern durch eine teilweise oder eine vollständige Vertauschung der Voraussetzung mit der Behauptung hervorgeht, so nennt man jeden der beiden Sätze die Umkehrung des andern.

3. Bei dem Beweise der Sätze, welche die Beziehung von zwei Sehnen auf die zugehörigen Bogen übertragen, wurde folgendermafsen verfahren. Nachdem über zwei gegebene Sehnen eines Kreises eine bestimmte Voraussetzung aufgestellt worden war, wurden alle Aussagen aufgezählt, die man beim Vergleichen zweier Bogen eines Kreises überhaupt machen kann, und die Überzeugung gebildet, dafs von diesen Aussagen eine einzige mit Ausschlufs aller übrigen für die beiden betrachteten Bogen gelten mufs. Dann wurde mit Hilfe von schon bewiesenen Lehrsätzen gezeigt, dafs von den aufgezählten Aussagen alle bis auf eine einzige zu Folgerungen führen, die mit der Voraussetzung in Widerspruch stehen.

Wenn bei einem Beweise gezeigt wird, dafs von allen Behauptungen, die bei einer Figur denkbar sind, eine einzige mit der aufgestellten Voraussetzung im Einklang ist, die übrigen aber der Voraussetzung widersprechen, so heifst das Beweisverfahren indirekt.

Übungen zu § 17.

1. Folgende Lehrsätze sollen in der Normalform ausgesprochen werden:

1. Zu dem gröfsern von zwei Bogen eines Kreises gehört der gröfsere Sektor.
2. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise ist ihre Achse.
3. Der Durchmesser ist die gröfste Sehne des Kreises.
4. Jeder Durchmesser teilt den Kreis in kongruente Teile.
5. Nebenwinkel sind Supplementwinkel.
6. Scheitelwinkel sind gleich.
7. Jeder Winkel hat eine einzige Halbierungslinie.
8. In jedem Punkte einer Geraden giebt es ein einziges Lot zu der Geraden.
9. Gleiche Nebenwinkel sind Rechte.

10. Von zwei ungleichen Nebenwinkeln ist der eine um ebensoviel kleiner als ein Rechter, als der andere gröfser als ein Rechter ist.
11. Die Halbierungslinien von Nebenwinkeln stehen senkrecht aufeinander.
12. Scheitelwinkel werden durch dieselbe Gerade halbiert.

2. Von den vorstehenden Sätzen sollen die Umkehrungen gebildet werden. Von welchen Sätzen sind die Umkehrungen richtig, von welchen falsch?

3. In welcher Beziehung mufs ein Satz zu einem schon bewiesenen Satze stehen, damit sein Beweis auf indirektem Wege versucht werden kann?

Siebentes Kapitel.

Die Mittelsenkrechte und die Fundamentalkonstruktionen.

§ 18. Die Mittelsenkrechte.

1. Da jede Strecke AB einen einzigen Mittelpunkt M hat, und es zu jeder Geraden in einem gegebenen Punkte M ein einziges Lot giebt, so gehört zu jeder Strecke eine einzige Gerade, die durch den Mittelpunkt der Strecke geht und zugleich auf dieser senkrecht steht (Fig. 26). Diese Gerade heifst die Mittelsenkrechte der Strecke.

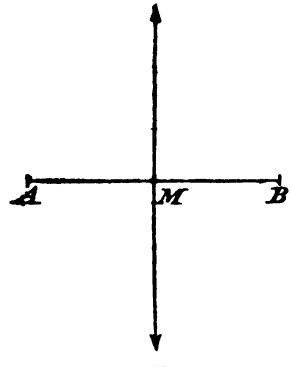


Fig. 26.

Die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist eine Achse der Geraden AB, folglich werden durch Zusammenklappen der durch die Mittelsenkrechte bestimmten Halbebenen die Strahlen MA und MB zur Deckung gebracht. Wegen der Gleichheit der Strecken MA und MB fallen aber auch die Punkte A und B aufeinander. Daher der Satz:

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Achse der Strecke.

Punkte, welche beim Zusammenklappen zweier Halbebenen zur Deckung kommen, heifsen symmetrisch bezüglich der gemeinschaftlichen Grenze der Halbebenen, und diese

heifst daher auch die Achse der betrachteten Punkte. Somit ist die Mittelsenkrechte einer Strecke auch die Achse ihrer Endpunkte. Die Achse zweier Punkte und ihre Verbindungslinie stehen also aufeinander senkrecht.

2. Ist C ein beliebiger Punkt der Mittelsenkrechten von AB, so werden durch Zusammenklappen der Halbebenen A und B die Strecken AC und BC zur Deckung

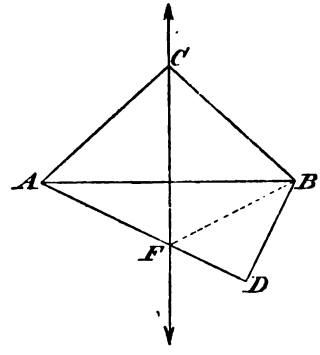


Fig. 27.

gebracht (Fig. 27). Jeder Punkt der Mittelsenkrechten hat also gleiche Abstände von den Endpunkten der Strecke.

Ist D ein beliebiger Punkt der Halbebene B, so führt die Strecke AD aus einer Halbebene in die andere, folglich über die Grenze beider. Sei F der Schnittpunkt von AD und der Mittelsenkrechten, dann ist $AF = BF$; die Strecke AD und die gebrochene Linie BFD sind also gleich. Letztere ist aber gröfser als die Strecke BD, die ihre Endpunkte verbindet; mithin auch $AD > BD$. Jeder Punkt der Halbebene B liegt also näher bei B wie bei A. Ebenso kann gezeigt werden, dafs jeder Punkt der Halbebene A diesem Punkte näher liegt, als dem Punkte B.

Die Gesamtheit der Punkte der Mittelsenkrechten ist demnach identisch mit der Gesamtheit der Punkte, die von den Endpunkten der Strecke gleiche Abstände haben, oder in andern Worten:

Der Ort für alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben, ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie.

3. Die Mittelsenkrechte einer Strecke AB ist eine Gerade und daher durch zwei Punkte bestimmt.

Wird in der Ebene ein Punkt P gewählt, der näher bei B als bei A liegt, z. B. der Punkt B selbst oder ein Punkt auf der Verlängerung von AB (Fig. 28), so giebt es auf dem Kreise um A mit dem Radius AP sowohl Punkte, die bezüglich der gesuchten Mittelsenkrechten in der Halbebene B liegen, als auch solche, die der Halbebene A angehören. Da nun der Kreis A eine geschlossene Linie ist, so schneidet er die Grenze der beiden Halbebenen in mindestens zwei Punkten, und jeder dieser Punkte liegt auf einem Kreise um B mit dem Radius AP. Man kann also um A und B gleiche Kreise zeichnen, die sich schneiden: die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte ist die Mittelsenkrechte von AB.

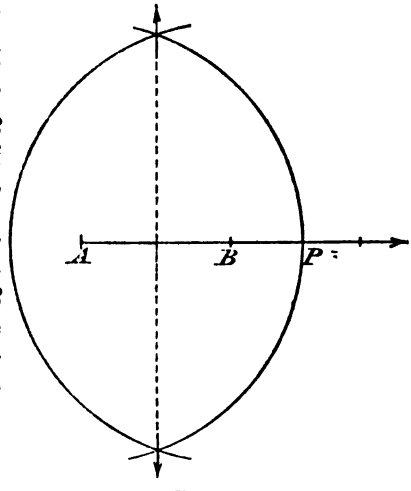


Fig. 28.

Die Mittelsenkrechte einer Strecke schneidet diese in ihrem Mittelpunkte.

Wenn man beide Hälften der Strecke a halbiert, so erscheint a in vier gleiche Teile geteilt. Durch weiteres Halbieren jedes der gleichen Teile erhält man der Reihe nach 8, 16, 32 gleiche Teile u. s. w. Die Anzahl der gleichen Teile, die man durch Halbieren einer Strecke und der entstandenen gleichen Teile erhält, ist stets eine Zahl, die keinen andern Primfaktor enthält als 2.

4. Die Hälfte, der 4. Teil, der 8. Teil von a werden beziehungsweise durch $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}$ bezeichnet.

Wenn n eine ganze Zahl ist, so versteht man allgemein unter $\frac{a}{n}$ die Strecke, von der das n-fache gleich a ist. Eine

Strecke, die durch Teilen einer gegebenen Strecke in eine vorgeschriebene Anzahl von gleichen Teilen erhalten wird, nennt man Quotient der gegebenen Strecke und der gegebenen Zahl; die Strecke heifst Dividend, die Zahl Divisor.

Wird in der Summe $(a + b)$ jeder Summand in 4 gleiche Teile geteilt, so kann man auf Grund des Kommutationsgesetzes die Teile so anordnen, dafs $a + b$ als das Vierfache von $\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4}\right)$ erscheint. Es ist also:

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{4} = \frac{a + b}{4}.$$

Durch Verallgemeinerung dieser Überlegung ergiebt sich, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n}.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind inhaltlich nicht von den folgenden verschieden:

$$\frac{a + b}{4} - \frac{b}{4} = \frac{a}{4}$$

und:

$$\frac{a + b}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a}{n}.$$

Sind die Summanden einer Summe gleich, so folgt weiter:

$$\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a + a + a}{4},$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{a}{4} \cdot 3 = \frac{3a}{4}.$$

Allgemein erhält man, wenn p und q ganze Zahlen sind:

$$\frac{a}{q} p = \frac{ap}{q}.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind ihrem Inhalte nach mit den folgenden beziehungsweise identisch:

$$\frac{3a}{4} : 3 = \frac{a}{4}$$

und:

$$\frac{ap}{q} : p = \frac{a}{q}.$$

Ist $b = \frac{a}{8}$, so ist $8b = a$, folglich:

$$5\ (8b) = (5\ .\ 8)\ b = 5a \text{ und } b = \frac{5a}{5.8}$$

oder:

$$\frac{a}{8} = \frac{5a}{5.8}.$$

Allgemein erhält man, wenn wieder p und q ganze Zahlen sind:

$$\frac{a}{q} = \frac{ap}{qp}.$$

(Siehe über die Reihenfolge der Faktoren § 7, 7).

Für die Quotienten bestätigt sich also der schon früher ausgesprochene Satz über die Identität der Gesetze in der geometrischen und in der algebraischen Zeichensprache.

Übungen zu § 18.

1. Eine gegebene Strecke in 4, 8 gleiche Teile zu teilen. Wieviel Kreise erfordert jede Aufgabe?

2. Welches ist der Ort für die Schnittpunkte aller Paare von gleichen Kreisen, die zwei gegebene Punkte zu Mittelpunkten haben?

3. Punkte zu finden, die von einem von 3 gegebenen Punkten einen gegebenen Abstand und von den beiden andern gleiche Abstände haben.

4. Zu einem gegebenen Punkte den symmetrischen in Bezug auf eine gegebene Gerade zu zeichnen.

5. Zu einer gegebenen Strecke, einem gegebenen Winkel, einem gegebenen Kreise das symmetrische Gebilde bezüglich einer gegebenen Achse zu konstruieren.

6. Gegeben eine Gerade g und zwei Paare von symmetrischen Punkten bezüglich g: A und B, P und Q. Welche Strecken und welche Winkel der Figur sind gleich? Welche

Beziehung besteht zwischen den Geraden AB und PQ? Wo schneiden sich 1) AP und BQ, 2) AQ und BP?

7. Wieviel Achsen besitzt die aus zwei gleichen Kreisen bestehende Figur? In welcher Beziehung stehen diese Achsen zueinander?

8. Gegeben eine Gerade g und zwei Punkte A und P aufserhalb g. Mit gegebenem Radius zwei gleiche Kreise so zu zeichnen, dafs der eine durch A geht, und die erhaltene Figur die Gerade g und eine nicht gegebene, durch P gehende Gerade zu Achsen hat.

9. Gegeben vier Punkte M, P, Q, A. Um den Punkt M und durch den Punkt A je einen Kreis so zu zeichnen, dafs die erhaltene Figur zwei Achsen besitzt, von denen die eine durch P und Q geht.

10. Gegeben eine Gerade g und zwei Punkte A und B in derselben Halbebene bezüglich g. In der andern Halbebene soll ein Punkt C so bestimmt werden, dafs jede gebrochene Linie, die einen Punkt von g mit A und B verbindet, gleich derjenigen ist, die denselben Punkt von g mit A und C verbindet. Für welchen Punkt von g ist die Summe der Abstände von A und B am kleinsten?

11. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu finden, der gleiche Abstände von zwei gegebenen Punkten hat. Bei welcher Lage der gegebenen Gebilde giebt es keinen solchen Punkt, und bei welcher Lage unendlich viele Punkte?

12. Zwei Strecken zu finden, wenn ihre Summe und ihre Differenz zwei gegebenen Strecken beziehungsweise gleich sind. (S. § 7, Übungen 4 u. 5).

13. Folgende Strecken zu zeichnen, wenn a und b gegeben sind:

1) $\frac{3a}{4}$ 2) $\frac{5b}{2}$ 3) $\frac{a}{3}+\frac{a}{6}$ 4) $\frac{a}{5}+\frac{3a}{10}$ 5) $\frac{4a}{3}-\frac{7a}{12}$

6) $\frac{5a}{6}+\frac{7a}{8}-\frac{5a}{24}$ 7) $3\,.\,\frac{a}{8}$ 8) $5\,.\,\frac{3a}{10}$ 9) $\frac{21a}{4}:7$

10) $\frac{25a}{2}:5$ 11) $\frac{3a}{2}:2$ 12) $5\,.\left(\frac{3a}{10}+b\right)$ 13) $(8a+4b):4$

14) $\left(\frac{5a}{4}-10b\right):5.$

14. Die mit x bezeichnete Strecke ist auf Grund folgender Gleichungen zu zeichnen:

1) $2x + b = a$. 2) $3x - b = x - a$.

3) $4x = a + b$. 4) $a + 3x = b - x$.

5) $6x - 5a + 2b = 2x - 6a + 3b$.

§ 19. Die Winkelhalbierende, die Senkrechte und die Parallele.

1. Ist C ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB (Fig. 29),

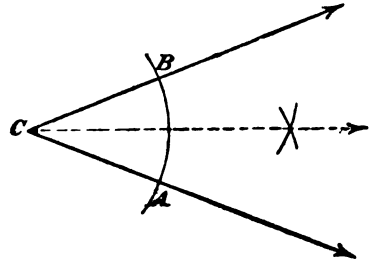


Fig. 29.

so werden durch Zusammenklappen der Halbebenen A und B die Strahlen CA und CB zur Deckung gebracht. Die Mittelsenkrechte von AB ist also die Achse des Winkels ACB, mithin dessen Halbierungslinie.

Die Figur kann nun so hergestellt werden, daſs man von dem Winkel ACB ausgeht. Die Punkte A und B werden auf den Schenkeln durch einen Kreis um den Scheitel ausgeschnitten. Ein zweiter Punkt der Mittelsenkrechten von AB wird als Schnittpunkt von zwei gleichen Kreisen um A und um B erhalten.

Durch fortgesetztes Halbieren eines Winkels und der erhaltenen gleichen Teile kann man der Reihe nach den gegebenen Winkel in 4, 8, 16 gleiche Teile zerlegen. Die Anzahl der gleichen Teile wird stets durch eine Zahl ausgedrückt, die keinen einzigen Primfaktor enthält, der von 2 verschieden ist.

Man kann Quotienten bilden, deren Dividenden Winkel sind, und mit solchen Quotienten Summen, Differenzen,

Produkte und neue Quotienten herstellen. Die so erhaltenen Ausdrücke sind denselben Gesetzen unterworfen, wie die entsprechenden Ausdrücke, die aus Strecken gebildet sind.

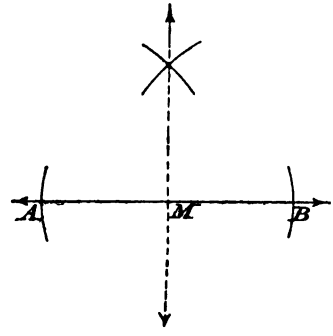


Fig. 30.

2. Die Mittelsenkrechte von AB kann auch als die Halbierungslinie des gestreckten Winkels AMB (Fig. 30) oder als das in M auf AB errichtete Lot betrachtet werden.

Geht man von der Geraden AB und dem Punkte M aus, so werden die Punkte A und B auf der gegebenen Geraden durch einen beliebigen Kreis um M ausgeschnitten. Ein zweiter Punkt der Mittelsenkrechten von AB ist ein Schnittpunkt von zwei gleichen Kreisen um A und um B.

3. Man kann die Mittelsenkrechte von AB weiter als das von C auf AB gefällte Lot auffassen (Fig. 31) und die Figur herstellen, indem man von der Geraden AB und dem Punkte C aufserhalb AB ausgeht.

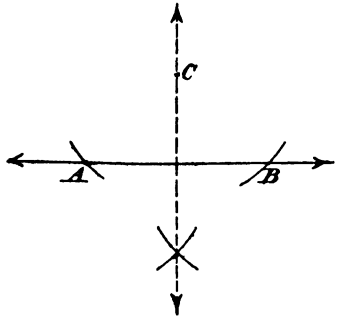


Fig. 31.

Die Punkte A und B werden wieder auf der gegebenen Geraden durch einen Kreis um den gegebenen Punkt ausgeschnitten. Ein zweiter Punkt der Mittelsenkrechten von AB ergiebt sich in bekannter Weise.

Könnten von C aus auf AB zwei Lote gefällt werden, so wäre AB ihre Achse. Mithin müfsten beide auch den Punkt gemein haben, der zu C bezüglich AB symmetrisch liegt. Daher geht auch durch jeden Punkt aufserhalb einer gegebenen Geraden nur ein einziges Lot zu der Geraden.

Der Schnittpunkt eines Lotes und der Geraden, auf der das Lot senkrecht steht, heifst der Fufspunkt des Lotes.

4. Sei wieder MC die Mittelsenkrechte von AB, dann ist CM die Halbierungslinie des Winkels ACB (Fig. 32). Wenn

nun der Kreis um C mit dem Radius CA den Strahl AC in D schneidet, und CF den Winkel DCB halbiert, so erscheint der flache Winkel ACD in vier Teile geteilt, von denen sowohl die beiden ersten als auch die beiden letzten gleich sind. Die Summe der beiden mittlern ist also der Summe der beiden andern gleich, und jede Summe beträgt daher einen Rechten. Die Geraden CF und AB stehen demnach auf derselben dritten Geraden MC senkrecht und sind folglich parallel (§ 16, 4).

Die Figur kann hergestellt werden, wenn man von C und der Geraden AB ausgeht. Die Punkte A und B werden auf der gegebenen Geraden durch einen Kreis um den gegebenen Punkt C ausgeschnitten. Dieser Kreis schneidet die Gerade AC in D. Ein zweiter Punkt von CF wird als Schnittpunkt von zwei gleichen Kreisen um B und um D erhalten. Durch jeden Punkt aufserhalb einer Geraden kann also zu dieser eine Parallele gezogen werden.

5. Nach der vorigen Konstruktion ist CF die Mittelsenkrechte von BD. Steht aber die Gerade BD auf CF senkrecht, so ist sie auch ein Lot von jeder Parallele zu CF, mithin auch von AB (Fig. 32). Man kann also BD als das in B auf AB errichtete Lot betrachten.

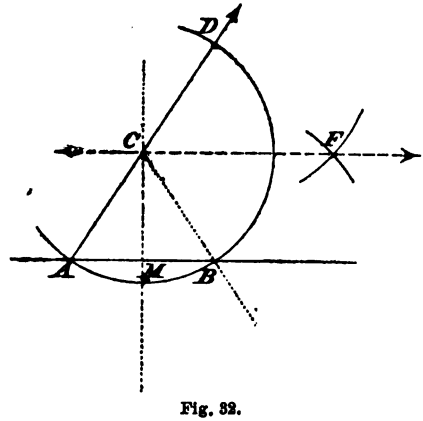


Fig. 32.

Geht man von der Geraden g und dem Punkte B dieser Geraden aus (Fig. 33), so kann um einen beliebigen Punkt C der Ebene der Kreis mit dem Radius CB beschrieben werden, der g in A schneidet. Die Gerade AC bestimmt dann auf dem Kreise C den Punkt D, und BD ist das gesuchte Lot.

Wenn G der Schnittpunkt der Geraden BC mit dem Kreise C ist, so steht auch AG auf AB senkrecht. Die vorige Konstruktion eines Lotes zu einer Geraden in einem

gegebenen Punkte derselben führt somit zu einem zweiten Lote, von dem allerdings der Fuſspunkt nicht von vornherein vorgeschrieben ist.

6. Die Gerade DB kann auch als das von einem gegebenen Punkte D auf eine gegebene Gerade g gefällte Lot aufgefaſst werden (Fig. 33).

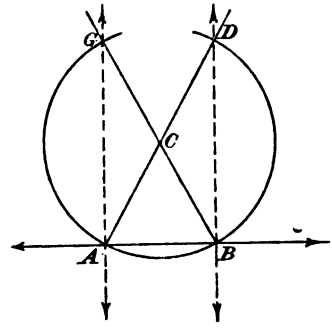


Fig. 33.

Um die Figur herzustellen, beschreibe man um D zwei konzentrische Kreise (Fig. 34), den gröſsern mit dem Durch-

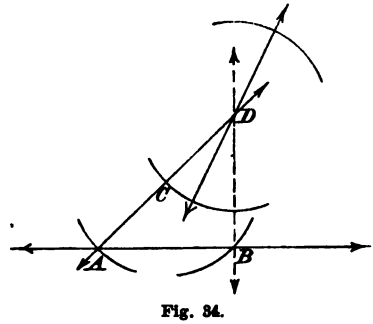


Fig. 34.

messer des kleinern als Radius. Ist A der Schnittpunkt des gröſsern mit der gegebenen Geraden, so bestimmt die Gerade AD auf dem kleinern der konzentrischen Kreise den Punkt C. Der Kreis um C mit dem Radius CA schneidet auf g den Punkt B aus, den Fuſspunkt des von D auf g gefällten Lotes.

Übungen zu § 19.

1. Einen gegebenen Bogen (Sektor) zu halbieren.

2. Einen gegebenen Winkel in 4, 8 gleiche Teile zu teilen. Wieviel Kreise erfordert jede Aufgabe?

3. Einen gegebenen Kreis in 4, 8 gleiche Sektoren zu teilen.

4. Auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte das Lot zu errichten, und von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade das Lot zu fällen, wenn Gerade und Punkt dicht am Rande der Zeichenfläche liegen.

5. Zu einer gegebenen Geraden zwei Lote zu zeichnen: 1) mit Hilfe von drei Kreisen, 2) mit Hilfe eines einzigen Kreises und zweier Geraden, wobei die gesuchten Lote nicht mitgezählt werden.

6. Unter welcher Bedingung giebt es auf der Halbierungslinie eines gegebenen Winkels einen Punkt, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat?

7. Einen gegebenen Winkel mit Hilfe von zwei Kreisen und einer gewissen Anzahl von Geraden in 2, 4, 8 gleiche Teile zu teilen. (Siehe § 18, Übung No. 6.)

8. Zwei Winkel (Bogen, Sektoren) zu finden, wenn man ihre Summe und ihre Differenz kennt. (Siehe § 16, Übung No. 6.)

9. Einen Winkel zu zeichnen, der um einen Rechten gröſser (kleiner) ist, als die Hälfte eines gegebenen Winkels. Welches ist der Ausdruck für den gesuchten Winkel, wenn der gegebene durch α bezeichnet wird?

10. Die Winkel $R + \alpha$ und $R - \alpha$ zu zeichnen, wenn α gegeben ist. Welche Beziehung besteht zwischen jenen Winkeln?

11. Die Aufgaben No. 13 und 14 von § 18 unter der Voraussetzung zu lösen, daſs die Strecken a, b, x durch die Winkel α, β, ξ ersetzt werden.

12. Die Hälfte des Nebenwinkels eines gegebenen Winkels ist um die Hälfte dieses Winkels kleiner als ein Rechter.

13. Folgende Winkel zu zeichnen:

$$\frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \frac{3R}{2}, \frac{R}{8}, \frac{5R}{8}.$$

14. Das auf der Halbierungslinie eines Winkels im Scheitel errichtete Lot halbiert den Nebenwinkel.

15. Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und ihre Halbierungslinien aufeinander senkrecht stehen, so liegen die nicht gemeinschaftlichen Schenkel in derselben Geraden. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

16. Wenn die Halbierungslinie der Differenz zweier Winkel auf ihrem gemeinschaftlichen Schenkel senkrecht steht, so sind die Winkel Supplementwinkel.

17. Wenn zwei Strecken, die einen Endpunkt gemein haben, aufeinander senkrecht stehen, so halbiert der Schnittpunkt ihrer Mittelsenkrechten die Verbindungslinie ihrer nicht gemeinschaftlichen Endpunkte. (Siehe die Fig. 32 und § 16, 4 u. 5.)

18. Wenn man um einen beliebig gewählten Punkt der Ebene einen Kreis beschreibt, der durch den Schnittpunkt von zwei zueinander senkrechten Geraden geht, so schneiden diese den Kreis in den Endpunkten eines Durchmessers.

§ 20. Der Kreis durch drei Punkte.

1. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, ist identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die von den gegebenen Punkten gleiche Abstände haben. In andern Worten:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie.

2. Soll ein Kreis durch die drei Punkte A, B, C gehen, so ist sowohl die Mittelsenkrechte von AB als auch die von BC ein Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Je nachdem diese beiden Mittelsenkrechten sich schneiden oder parallel sind, giebt es einen einzigen Kreis oder keinen, der durch die gegebenen Punkte gelegt werden kann.

Wenn die genannten Mittelsenkrechten parallel sind, so steht die Gerade AB auf der einen von zwei Parallelen senkrecht, folglich auch auf der andern, nämlich auf der Mittelsenkrechten von BC. Die Geraden AB und BC stehen somit auf derselben Geraden senkrecht und gehen durch denselben Punkt B, folglich fallen sie zusammen.

Die Punkte A, B, C liegen also in derselben Geraden. So erhalten wir den Satz:

Durch drei gegebene Punkte giebt es keinen Kreis oder einen einzigen, je nachdem die drei Punkte in derselben Geraden liegen oder nicht.

Wenn A, B, C nicht in derselben Geraden liegen, so hat der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und von BC auch von A und C gleiche Abstände; er liegt also auch auf der Mittelsenkrechten von AC.

Übungen zu § 20.

1. Wieviel Kreise sind erforderlich, um den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, der durch drei gegebene Punkte geht?

2. Von einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden.

3. Mit gegebenem Radius zwei Kreise zu zeichnen, die durch zwei gegebene Punkte gehen.

4. Die Verbindungslinien eines Punktes einer Kreislinie mit den Endpunkten eines Durchmessers stehen senkrecht aufeinander. (Die Mittelsenkrechten der Verbindungslinien halbieren zwei Nebenwinkel, deren gemeinschaftlicher Scheitel der Kreismittelpunkt ist. So gelangt man zu zwei Geraden, die auf derselben dritten senkrecht stehen, und dann wieder zu einer Geraden, die auf einer von zwei Parallelen senkrecht steht.)

5. Die Endpunkte zweier Durchmesser eines Kreises bestimmen zwei Paare von Parallelen.

6. Wieviel Punkte haben ein Kreis und eine Gerade, oder zwei Kreise höchstens gemein?

7. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht, und dessen Mittelpunkt auf einem gegebenen Kreise oder auf einer gegebenen Geraden liegt. Wieviel Kreise giebt es in jedem Falle höchstens?

8. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Strecke zum Durchmesser hat.

9. Zwei Kreise zu zeichnen, die durch denselben Punkt auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gehen. Wieviel Punkte haben beide Kreise gemein?

10. Wenn eine Gerade auf einem Durchmesser eines Kreises in seinem Endpunkte senkrecht steht, so hat sie einen einzigen Punkt mit dem Kreise gemein.

11. Um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, der mit einer gegebenen Geraden einen einzigen Punkt gemein hat.

12. Von zwei nicht gezeichneten Kreisen sind gegeben der eine Schnittpunkt und der gemeinschaftliche Durchmesser. Man soll den zweiten Schnittpunkt der Kreise finden.

13. Wenn A und B zwei feste Punkte sind, und C ein Punkt, der sich in der Ebene auf einer beliebigen Linie fortbewegt, welches ist der Ort für den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $A\,C$ und $B\,C$?

14. Gegeben drei Punkte A, B, P und eine Gerade g. Man soll zwei Kreise so zeichnen, dafs der eine durch A und B geht, und die erhaltene Figur die Gerade g und eine nicht gegebene, durch P gehende Gerade zu Achsen hat. Die Aufgabe ist auf zwei Arten zu lösen. (Siehe § 18, Übung No. 7).

15. Gegeben drei Punkte A, B, P und eine Gerade g. Durch A und B je einen Kreis so zu legen, dafs die erhaltene Figur die Gerade g und eine nicht gegebene, durch P gehende Gerade zu Achsen hat. Die Aufgabe ist auf zwei Arten zu lösen.

Achtes Kapitel.

Der Streifen.

§ 21. Die Streifenwinkel.

1. Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, so liegen an jedem der beiden Schnittpunkte vier Winkel. Bildet man aus je zwei Winkeln an verschiedenen Schnittpunkten ein Paar (Fig. 35), so liegen die Winkel des Paares entweder auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Quergeraden, und ihre in der Quergeraden liegenden Schenkel liegen entweder in derselben Richtung oder in entgegengesetzten Richtungen.

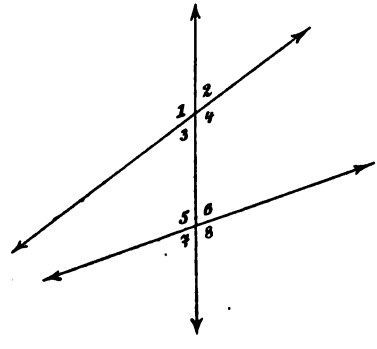


Fig. 35.

Liegen zwei Winkel mit verschiedenen Scheiteln auf derselben Seite einer Quergeraden zweier Geraden, und sind ihre in der Quergeraden liegenden Schenkel gleichgerichtet (z. B. Winkel No. 4 u. No. 8), oder: liegen zwei Winkel mit verschiedenen Scheiteln auf entgegengesetzten Seiten der Quergeraden, und sind die in der Quergeraden liegenden Schenkel entgegengesetzt gerichtet (z. B. Winkel No. 3 u. No. 6), so nennt man die Winkel entsprechend.

Zwei Winkel der Figur, die zwar verschiedene Scheitel haben, aber den übrigen Bedingungen nicht genügen, heifsen nicht entsprechend (z. B. Winkel No. 1. u. No. 7).

2. Die nähere Betrachtung der Figur führt zu folgendem Ergebnis:

Geht man von zwei Winkeln irgend einer Art aus, so gelangt man zu Winkeln derselben Art, wenn man den einen durch seinen Scheitelwinkel, oder beide durch ihre Scheitelwinkel, oder beide durch ihre Nebenwinkel ersetzt. Man kommt dagegen zu zwei Winkeln der andern Art, wenn man an die Stelle des einen Winkels einen seiner Nebenwinkel, oder an die Stelle des einen den Scheitelwinkel und zugleich an die Stelle des andern einen seiner Nebenwinkel treten läfst.

Wenn die Winkel, von denen ausgegangen wird, gleich sind, so ergiebt sich mit Hilfe der Sätze über Scheitelwinkel und Nebenwinkel, dafs je zwei Winkel derselben Art wie die zuerst betrachteten gleich, und je zwei Winkel der andern Art Supplementwinkel sind. Sind aber die beiden Winkel, von denen man ausgeht, Supplementwinkel, so sind je zwei Winkel, die derselben Art sind wie jene, Supplementwinkel, und je zwei Winkel der andern Art gleich. So ergeben sich die Sätze:

Sind zwei entsprechende Winkel gleich, so sind je zwei entsprechende gleich, und je zwei nicht entsprechende Supplementwinkel.

Sind zwei nicht entsprechende Winkel Supplementwinkel, so sind je zwei nicht entsprechende Supplementwinkel, und je zwei entsprechende gleich.

Sind zwei entsprechende Winkel Supplementwinkel, so sind je zwei entsprechende Supplementwinkel, und je zwei nicht entsprechende gleich.

Sind zwei nicht entsprechende Winkel gleich, so sind je zwei nicht entsprechende gleich, und je zwei entsprechende Supplementwinkel.

3. Die beiden Parallelen, die einen Streifen begrenzen, heifsen die Ränder des Streifens; die Winkel, welche eine Quergerade mit den Rändern bestimmt, nennt man Streifenwinkel (Fig. 36).

Zu jedem Streifenwinkel giebt es einen entsprechenden, der sich von ihm durch eine Streifenhälfte unterscheidet:

beide Winkel sind also gleich. Unter Berücksichtigung der vorigen Sätze erhalten wir also den folgenden:

Entsprechende Streifenwinkel sind gleich, nicht entsprechende sind Supplementwinkel.

4. Werden die Geraden CD und EF von AB so geschnitten, dafs zwei entsprechende Winkel gleich, oder zwei nicht entsprechende Supplementwinkel sind (Fig. 36), so sind je zwei entsprechende gleich.

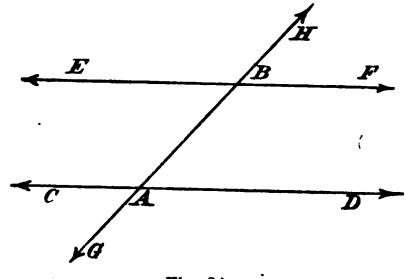


Fig. 36.

Für die Geraden CD und EF trifft von den folgenden Annahmen die eine notwendig zu: entweder schneiden sie sich in einem einzigen Punkte, oder sie sind parallel. Denkt man sich die Halbebene D um den Mittelpunkt M von AB gedreht, bis sie sich mit der Halbebene C deckt, so gelangen der Scheitel B und der Schenkel BH des Winkels HBF beziehungsweise mit dem Scheitel A und dem Schenkel AG des Winkels GAC zur Deckung. Da die genannten Winkel gleich sind und nach erfolgter Drehung bezüglich ihres gemeinschaftlichen Schenkels in derselben Halbebene liegen, so fallen auch die Schenkel BF und AC zusammen. In ähnlicher Weise zeigt man, dafs durch die Drehung auch der Strahl AD mit BE zur Deckung gebracht wird. Wenn nun die Strahlen AC und BE der einen Halbebene einen Schnittpunkt hätten, so würden sich die Strahlen AD und BF ebenfalls schneiden, und die Geraden CD und EF zwei Schnittpunkte besitzen, was mit der Voraussetzung, dafs es zwei verschiedene Gerade sind, in Widerspruch steht. Die zweite Annahme, dafs beide Gerade parallel sind, ist somit die zutreffende. Dies Ergebnis wird in folgendem Satze ausgesprochen:

Sind zwei entsprechende Winkel gleich, oder zwei nicht entsprechende Supplementwinkel, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

5. Wenn zwei Strahlen oder Strecken Teile von parallelen Geraden sind, so heifsen sie selbst parallel.

Die Verbindungslinie der Endpunkte paralleler Strahlen bestimmt zwei Halbebenen: liegen beide Strahlen in derselben Halbebene, so heifsen sie gleichgerichtet; liegen sie in verschiedenen Halbebenen, so nennt man sie entgegengesetzt gerichtet.

Werden die Ränder eines Streifens durch die eines zweiten Streifens in A, B, C und D geschnitten (Fig. 37),

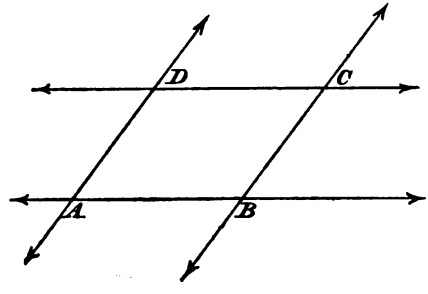


Fig. 37.

und vergleicht man hinsichtlich ihrer Richtung die Schenkel der Winkelpaare, deren Scheitel nicht demselben Streifenrande angehören, so kann man zwei Fälle unterscheiden: 1) je zwei parallele Schenkel beider Winkel sind gleichgerichtet, oder je zwei sind entgegengesetzt gerichtet, 2) zwei parallele Schenkel beider Winkel sind gleichgerichtet, die beiden andern entgegengesetzt gerichtet.

Liegt bei den betrachteten Winkeln der erste Fall vor, so ist jeder Winkel, der dem einen von ihnen an einem dritten Schnittpunkte entspricht, auch ein entsprechender des andern: beide Winkel sind also demselben dritten gleich, mithin auch einander gleich. Im zweiten Falle ist jeder Winkel, der an einem dritten Schnittpunkte ein entsprechender des einen ist, für den andern ein nicht entsprechender: beide Winkel sind also Supplementwinkel. So ergiebt sich der Satz:

Winkel mit zwei gleichgerichteten oder zwei entgegengesetzt gerichteten Schenkelpaaren sind gleich.

Winkel mit einem Paare gleichgerichteter und einem Paare entgegengesetzt gerichteter Schenkel sind Supplementwinkel.

6. Wenn man sich die Aufgabe stellt, durch einen Punkt A zu der Geraden g eine Parallele zu ziehen, so kann man die Lösung auf folgende Weise erhalten. Man ziehe durch A eine beliebige Gerade, die g in B schneidet und trage an die Gerade in A einen Winkel an, der einem der vier Winkel zwischen g und AB entspricht und gleich ist. Jede Gerade, die durch A gelegt und mit g zum Durchschnitt gebracht wird, führt somit zu einem Parallelstrahle zu g durch den Punkt A. Es seien AP und AQ (Fig. 38 u. 39) zwei solche Strahlen und AB eine beliebige Gerade durch A.

Liegen AP und AQ bezüglich AB in derselben Halbebene (Fig. 38), so sind die Winkel CAP und CAQ demselben dritten Winkel ABD gleich, mithin einander gleich; also decken sich die Strahlen AP und AQ.

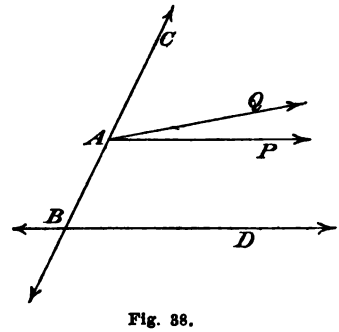


Fig. 38.

Liegen AP und AQ in verschiedenen Halbebenen bezüglich AB (Fig. 39), so ist von den beiden Winkeln CAP und CAQ der eine dem Winkel ABD gleich, der andere dem Nebenwinkel von ABD. Es ist also $\sphericalangle CAP + CAQ = 2R$, und die Strahlen AP und AQ bilden zusammen eine Gerade. Somit ergiebt sich:

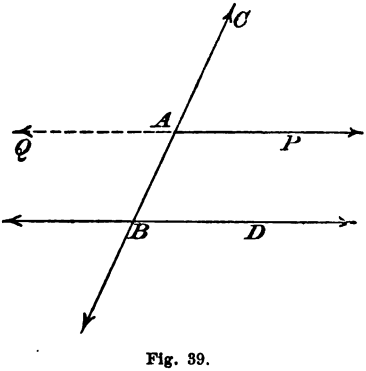


Fig. 39.

Durch jeden Punkt aufserhalb einer Geraden geht eine einzige Parallele zu der Geraden.

7. Denkt man sich zu einer Geraden zwei Parallelen gezogen, so können diese sich nicht schneiden, weil sonst durch ihren Schnittpunkt zwei Parallelen zu der gegebenen Geraden gezogen wären. Also folgt:

Zwei Gerade, die zu derselben dritten parallel sind, sind zueinander parallel.

8. Wenn die Geraden CD und EF (Fig. 40) so geschnitten

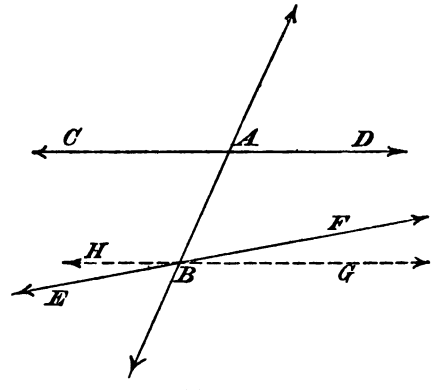


Fig. 40.

werden, daſs $\sphericalangle FBA + BAD \neq 2R$ ist, so sind EF und CD nicht parallel, haben also einen einzigen Schnittpunkt.

In der einen der durch AB bestimmten Halbebenen ist für das mittlere Paar nicht entsprechender Winkel die Summe kleiner als zwei Rechte, in der andern Halbebene gröſser. Wir nehmen an, daſs ersteres für die Halbebene D zutreffe.

Zieht man durch B die Parallele GH zu CD, so ist: $\sphericalangle GBA + BAD = 2R$ und $\sphericalangle HBA + BAC = 2R$. Da aber $\sphericalangle FBA + BAD < 2R$ und $\sphericalangle EBA + BAC > 2R$ ist, so ergiebt sich: $\sphericalangle GBA > FBA$ und $\sphericalangle HBA < EBA$. Der Strahl BF liegt also bezüglich GH in der Halbebene, die den Streifen enthält, der Strahl BE in der streifenfreien Halbebene. Letzterer kann somit den Streifenrand CD nicht schneiden, der Schnittpunkt von EF und CD liegt demnach auf dem Strahle BF. So erhalten wir den Satz:

Wenn zwei nicht parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so liegt ihr Schnittpunkt bezüglich der Quergeraden in derjenigen Halbebene, in welcher für das mittlere Paar nicht entsprechender Winkel die Summe kleiner als zwei Rechte ist.

Übungen zu § 21.

1. An jeden Schenkel eines gegebenen Winkels soll in einem gegebenen Punkte ein entsprechender (nicht entsprechender) Winkel angetragen werden.

2. Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, wieviel entsprechende Winkel und wieviel nicht entsprechende giebt es an dem einen Schnittpunkte zu jedem Winkel an dem andern?

3. Sind zwei entsprechende Winkel gleich (zwei nicht entsprechende Supplementwinkel), so sind die Halbierungslinien von je zwei entsprechenden parallel, und die Halbierungslinien von je zwei nicht entsprechenden senkrecht zu einander.

4. Sind zwei nicht entsprechende gleiche Winkel (zwei entsprechende Supplementwinkel) an derselben Geraden angetragen, so schneiden sich die Schenkel, die nicht in jener Geraden liegen, oder die Verlängerungen dieser Schenkel auf der Mittelsenkrechten der Verbindungslinie der Scheitel.

5. Die Halbierungslinien von entsprechenden Streifenwinkeln sind parallel, die Halbierungslinien von nicht entsprechenden stehen senkrecht aufeinander.

6. Welche frühern Sätze sind besondere Fälle der Sätze in No. 3 u. No. 4? (Siehe § 16, 4 u. 5.)

7. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel einschliefst. Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?

8. Welche Beziehung besteht zwischen den Halbierungslinien zweier Winkel, 1) wenn ihre Schenkel zwei Paare gleichgerichteter oder zwei Paare entgegengesetzt gerichteter Strahlen sind, 2) wenn ihre Schenkel ein Paar gleichgerichteter und ein Paar entgegengesetzt gerichteter Strahlen bilden?

9. Stehen die Schenkel eines Winkels beziehungsweise auf den Schenkeln eines andern senkrecht, so sind die zwei Winkel gleich oder Supplementwinkel.

10. Stehen die Schenkel eines Winkels beziehungsweise auf den Schenkeln eines andern senkrecht, so sind die Halbierungslinien der beiden Winkel parallel oder senk-

recht zu einander, je nachdem diese Winkel Supplementwinkel oder gleich sind.

11. Zieht man durch den Scheitel eines Streifenwinkels die Parallele zu der Halbierungslinie eines entsprechenden (nicht entsprechenden) Streifenwinkels, so wird jener Streifenwinkel (jeder Nebenwinkel jenes Streifenwinkels) durch die Parallele halbiert.

12. Fällt man von dem Scheitel eines Streifenwinkels das Lot auf die Halbierungslinie eines nicht entsprechenden (entsprechenden) Streifenwinkels, so wird jener Winkel (jeder Nebenwinkel jenes Winkels) durch das Lot halbiert.

13. Sind zwei Gerade beziehungsweise zu den Schenkeln eines Winkels parallel, und zieht man durch ihren Schnittpunkt die Parallele und die Senkrechte zu der Halbierungslinie des Winkels, so werden die Winkel jener Geraden halbiert.

14. Wenn man durch den beliebig gewählten Punkt P zu der einen von zwei gegebenen Geraden die Parallele und zu der andern die Senkrechte konstruiert, in welcher Beziehung stehen die Winkel, die durch die Parallele und die Senkrechte bestimmt werden, zu den Winkeln der gegebenen Geraden? (Man ziehe durch P auch zu der zweiten Geraden die Parallele.)

15. Unter welchen Winkeln werden in No. 14 die Halbierungslinien der Winkel in P von den Geraden geschnitten, welche die Winkel der gegebenen Geraden halbieren?

16. Eine Gerade, die auf dem einen Schenkel eines Winkels senkrecht steht, schneidet dessen Halbierungslinie oder deren Verlängerung, je nachdem der Winkel kleiner oder gröfser als zwei Rechte ist.

17. Wenn zwei nicht entsprechende Winkel auf derselben Seite einer Geraden an diese angetragen sind, und keiner von beiden überstumpf ist, so schneiden sich ihre Halbierungslinien.

§ 22. Die Querstrecken und die Achse des Streifens.

1. Jede Strecke, die zwei Punkte auf verschiedenen Rändern desselben Streifens verbindet, heifst Querstrecke des Streifens.

Wir setzen voraus, die Querstrecken AD und BC stehen auf dem Rande AB senkrecht (Fig. 41), und MN sei die Mittelsenkrechte von AB.

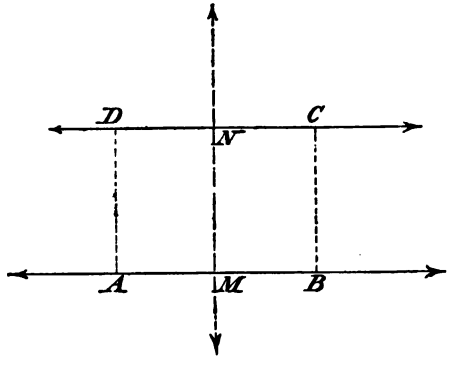


Fig. 41.

Durch Zusammenklappen der durch MN bestimmten Halbebenen werden die Punkte A und B, mithin auch die Strahlen AD und BC zur Deckung gebracht. Da MN auch auf CD senkrecht steht (§ 16, 5), so fallen auch die Strahlen ND und NC zusammen; folglich auch der Schnittpunkt D der Strahlen AD und ND mit dem Schnittpunkte C der Strahlen BC und NC. Also sind die Strecken AD und BC kongruent und gleich.

Denkt man sich den Streifen doppelt gelegt, so kann der eine so verschoben gedacht werden, dafs seine Querstrecke BC mit der Querstrecke AD des festen Streifens zur Deckung kommt. Jeder Rand des verschobenen Streifens steht dann in demselben Punkte auf derselben Geraden AD senkrecht, wie ein Rand des festen; folglich decken sich die Streifen auch nach der Verschiebung.

Denkt man sich in jedem Punkte zwischen A und B die zu AB senkrechte Querstrecke errichtet, so ist jede derselben gleich BC. Wenn man also den zweiten Streifen so verschiebt, dafs AB ein gemeinschaftlicher Rand beider Streifen bleibt, so wird bei jeder Lage des verschobenen Streifens auch CD ein gemeinschaftlicher Rand beider Streifen sein. Dies Ergebnis wird in folgendem Satze ausgesprochen:

Jeder Streifen ist in sich selbst verschiebbar.

2. AD und BC seien parallele Querstrecken desselben Streifens. (Fig. 37 ohne die Verlängerungen der Strecken AD und BC.)

Man denke sich die Gerade AB in der Ebene fest und den Streifen mit der Querstrecke BC so in sich selbst verschoben, daſs B mit A zur Deckung gebracht wird. Wegen der Gleichheit des Winkels DAB und seiner entsprechenden in B fallen dann auch die Strahlen BC und AD zusammen, folglich auch die Punkte C und D, da ja bei der Verschiebung jeder Punkt eines Randes seinen Rand durchläuft. Also ergiebt sich:

Parallele Querstrecken desselben Streifens sind gleich.

Jede Querstrecke eines Streifens, die auf den Rändern senkrecht steht, heiſst Breite des Streifens oder Abstand seiner Ränder.

3. Eine Gerade, die auf den Rändern senkrecht steht, ist für jeden Rand eine Achse, mithin auch für den Streifen selbst.

Die Mittelsenkrechte PQ irgend einer Breite AB bestimmt zwei Halbebenen (Fig. 42), durch deren Zusammen-

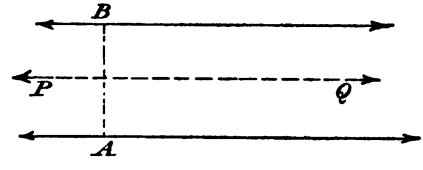


Fig. 42.

klappen die Ränder zur Deckung gebracht werden. PQ ist also eine Achse des Streifens, und zwar die einzige, die auf AB senkrecht steht. Die Mittelsenkrechten aller Breiten liegen also in einer und derselben Geraden, folglich erhalten wir den Satz:

Jeder Streifen hat unzählig viele Achsen, die auf den Rändern senkrecht stehen, aber eine einzige, die zu den Rändern parallel ist.

Die zu den Rändern parallele Achse heiſst die Streifenachse schlechthin.

4. Wenn zwei Gerade mit derselben dritten gleiche nicht entsprechende Winkel bestimmen, so heifsen sie antiparallel (Fig. 43).

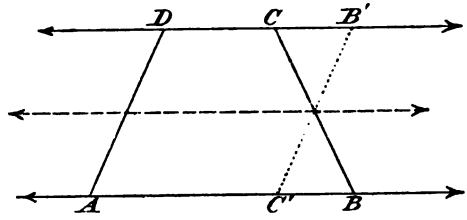


Fig. 43.

Durch Umklappen eines Streifens um seine Achse wird jede von zwei antiparallelen Querstrecken AD und BC zu der ursprünglichen Lage der andern parallel, beide sind also gleich. Daher der Satz:

Antiparallele Querstrecken desselben Streifens sind gleich.

5. Durch Zusammenklappen der beiden Streifenhälften um die Achse verwandeln sich die Abschnitte, die durch die Achse auf irgend einer Querstrecke bestimmt werden, in antiparallele Querstrecken desselben Streifens (Fig. 44).

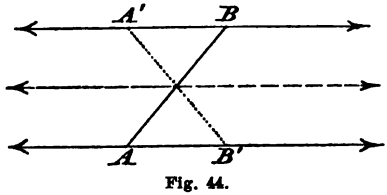


Fig. 44.

Jede Querstrecke wird also durch die Achse halbiert. Da jede Querstrecke nur einen Mittelpunkt hat, erhalten wir den Satz:

Die Streifenachse ist der Ort für die Mittelpunkte aller Querstrecken.

6. Man kann in jedem von zwei Streifen je eine Querstrecke so ziehen, dafs die Streifenwinkel in dem einen Streifen denen des andern beziehungsweise gleich sind. Solche Querstrecken heifsen homolog.

Wenn die betrachteten Streifen kongruent sind und zur Deckung gebracht werden, so werden irgend zwei homologe Querstrecken derselben entweder parallele oder antiparallele Querstrecken desselben Streifens. Somit ergiebt sich:

Homologe Querstrecken kongruenter Streifen sind gleich.

7. Sind AC und BC zwei gleiche Querstrecken mit gemeinschaftlichem Endpunkte (Fig. 45), so liegt C auf der

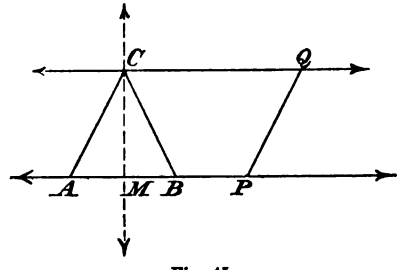


Fig. 45.

Mittelsenkrechten MC von AB. Durch Zusammenklappen der durch MC bestimmten Halbebenen werden die Punkte A und B, mithin auch die nicht entsprechenden Winkel CAM und CBM zur Deckung gebracht; folglich sind AC und BC antiparallel.

Sei PQ irgend eine Querstrecke des Streifens, die AC gleich ist. Dann kann durch C eine zu PQ parallele Querstrecke CF gezogen gedacht werden, und es ist dann $CF = PQ = CA$. Fiele CF mit keiner der beiden Querstrecken CA oder CB zusammen, so gäbe es auf der Geraden AB drei Punkte A, B, F, die auf demselben Kreise C lägen, was unmöglich ist. Folglich deckt sich CF entweder mit CA oder mit CB. So erhalten wir den Satz:

Gleiche Querstrecken desselben Streifens sind parallel oder antiparallel.

Durch indirekte Beweisführung ergiebt sich weiter: Ungleiche Querstrecken desselben Streifens sind weder parallel noch antiparallel, und Querstrecken, die weder parallel noch antiparallel sind, sind ungleich.

8. Zwei Streifen kann man sich immer so aneinander gelegt denken, daſs sie einen Rand gemein haben, und zwei beliebige Querstrecken beider Streifen von demselben Punkte des gemeinschaftlichen Randes ausgehen.

Sind AB und AC zwei homologe und gleiche Querstrecken beider Streifen, so ist entweder AC die Verlängerung von BA oder zu der Verlängerung AD von BA antiparallel. In beiden Fällen ist A der Mittelpunkt einer Querstrecke desjenigen Streifens, der durch die nicht gemeinschaftlichen Ränder der gegebenen Streifen gebildet wird. Der gemeinschaftliche Rand der gegebenen Streifen ist somit die Achse des neuen Streifens, und die gegebenen sind kongruent. Es folgt also der Satz:

Sind homologe Querstrecken zweier Streifen gleich, so sind diese kongruent.

9. Wenn man die Querstrecke AB (Fig. 46) eines

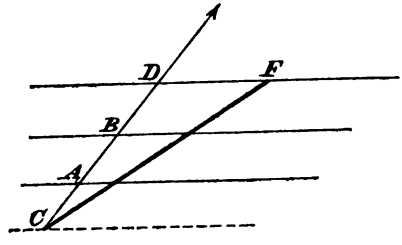


Fig. 46.

Streifens über jeden Endpunkt hinaus um sich selbst verlängert und durch die Endpunkte C und D der Verlängerungen die Parallelen zu den Rändern zieht, so bestimmen diese Parallelen einen neuen Streifen. Dieser wird durch die Ränder des Urstreifens in drei Streifen geteilt, in denen CA, AB, BD homologe und gleiche Querstrecken sind; der neue Streifen setzt sich also aus drei kongruenten Streifen zusammen. Jede Querstrecke des neuen Streifens wird daher durch die Ränder des alten in drei gleiche Teile geteilt, also auch CF.

Die Figur kann hergestellt werden, wenn man von der Strecke CF ausgeht. Man ziehe durch C einen beliebigen Strahl und trage auf ihm die drei gleichen Strecken CA,

AB, BD ab, verbinde D mit F und lege durch A und B die Parallelen zu DF.

Man sieht ohne weiteres, auf welche Weise eine gegebene Strecke in jede vorgeschriebene Anzahl von gleichen Teilen geteilt werden kann.

Übungen zu § 22.

1. Parallele Querstrecken eines Streifens können durch Drehung zur Deckung gebracht werden.

2. Antiparallele Querstrecken eines Streifens können durch Zusammenklappen zur Deckung gebracht werden.

3. Homologe Querstrecken kongruenter Streifen können zur Deckung gebracht werden.

4. Parallele Querstrecken eines Streifens bestimmen gleiche Abschnitte auf den Rändern.

5. Wenn der Mittelpunkt eines Kreises auf der Achse eines Streifens liegt, welches ist die Achse der Figur? Welche Strecken sind gleich, wenn der Kreis die Ränder schneidet?

6. Zu einer gegebenen Geraden zwei Parallelen in einem gegebenen Abstande zu ziehen. (Die Breite der gesuchten Streifen ist vorgeschrieben.)

7. Wird ein Winkel durch die Achse eines Streifens halbiert, so steht die Verbindungslinie der Schnittpunkte seiner Schenkel mit den Rändern auf der Streifenachse senkrecht. (Die Streifenachse ist auch die Achse der betrachteten Schnittpunkte.)

8. Wenn die Halbierungslinie eines Winkels zweier Geraden auf der Achse eines Streifens senkrecht steht, so bestimmen die Ränder gleiche Abschnitte auf den Geraden. (Man suche die Achse der Figur auf.)

9. Wenn eine Querstrecke eines Streifens eine zweite Querstrecke halbiert, so halbiert diese auch die erste.

10. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Strecken, die einen Endpunkt gemein haben, ist parallel zur Verbindungslinie der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte. (Jene Verbindungslinie ist die Achse eines Streifens.)

11. Mit Hilfe eines einzigen Kreises einen Streifen zu verdoppeln.

12. Haben zwei Strecken einen Endpunkt gemein, und zieht man durch den Mittelpunkt der einen die Parallele zur Verbindungslinie der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte, so halbiert diese Parallele die zweite Strecke.

13. Wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Strecken zu der Verbindungslinie zweier Endpunkte parallel ist, so ist sie auch zur Verbindungslinie der andern Endpunkte parallel, und die beiden übrigen Verbindungslinien der Endpunkte werden durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte halbiert.

14. Wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Strecken die Verbindungslinie zweier Endpunkte halbiert, so halbiert sie auch die Verbindungslinie der beiden andern Endpunkte, und die beiden übrigen Verbindungslinien der Endpunkte sind zur Verbindungslinie der Mittelpunkte parallel.

15. Eine Strecke in eine vorgeschriebene Anzahl von gleichen Teilen zu teilen.

16. Einen Streifen in eine vorgeschriebene Anzahl von kongruenten Streifen zu teilen.

17. Wenn man zwei Strecken, die einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, jede um ihre Hälfte, oder jede um ihren dritten Teil, oder u. s. w. verlängert, und zwar jede über den gemeinschaftlichen Endpunkt oder beide über die nicht gemeinschaftlichen Endpunkte hinaus, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte der Verlängerungen parallel zur Verbindungslinie der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte.

18. Wenn eine Querstrecke eines Streifens durch eine Parallele zu den Rändern so geteilt wird, dafs der n^{te} Teil des einen Abschnittes gleich dem s^{ten} Teile des andern ist, so wird jede Querstrecke des Streifens durch die Parallele in derselben Weise geteilt. (Man teile den gegebenen Streifen in $n + s$ kongruente Streifen.)

19. Eine gegebene Strecke so zu teilen, dafs der dritte Teil des einen Abschnittes gleich dem vierten Teile des andern ist.

20. Eine Strecke zu zeichnen, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels liegen, und die durch einen gegebenen Punkt so geteilt wird, dafs der 4. Teil des einen Abschnittes gleich dem 3. Teile des andern ist. (Die gesuchte Strecke ist

als Querstrecke eines Streifens zu betrachten, der durch Parallelen zu dem einen Schenkel in $4+3$ kongruente Streifen geteilt ist. Die eine der Parallelen geht durch den gegebenen Punkt.)

21. Einen Punkt zu zeichnen, der von den Endpunkten zweier antiparallelen Querstrecken eines Streifens gleiche Abstände hat.

22. Wenn ein Kreis von den Rändern eines Streifens geschnitten wird, welches ist die Achse der Figur? Welche Querstrecken des Streifens sind antiparallel?

§ 23. Die Streifenecke.

1. Zwei parallele Querstrecken eines Streifens begrenzen mit den Rändern eine Fläche, die Parallelogramm heifst (Fig. 47). Die vier Grenzstrecken des Parallelogramms

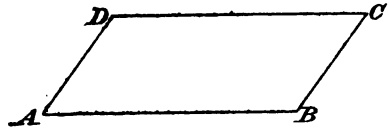


Fig. 47.

nennt man seine Seiten, die Endpunkte der Seiten seine Ecken, und die vier Winkel, in denen das Parallelogramm liegt, seine Winkel. Seiten, die keinen Endpunkt gemein haben, heifsen Gegenseiten; Winkel, die nicht derselben Seite anliegen, Gegenwinkel. Das Parallelogramm ist ein Viereck, in dem je zwei Gegenseiten parallel sind.

Je zwei Gegenseiten sind parallele Querstrecken desselben Streifens, je zwei Gegenwinkel werden durch zwei Paare von entgegengesetzt gerichteten Schenkeln begrenzt, und je zwei Nachbarwinkel sind nicht entsprechende Streifenwinkel. Folglich ergiebt sich der Satz:

Gegenseiten (Gegenwinkel) eines Parallelogramms sind gleich, Nachbarwinkel sind Supplementwinkel.

2. In dem Viereck $ABCD$ (Fig. 48) seien je zwei Gegenseiten gleich.

Wenn der Punkt C' zu C symmetrisch liegt bezüglich der Mittelsenkrechten von BD, so ist $DC'=BC=DA$ und $BC'=DC=BA$. Der Kreis um D mit dem Radius

DA und der Kreis um B mit dem Radius BA schneiden sich also in A und C'; diese Punkte liegen daher symmetrisch bezüglich BD. Somit folgt weiter: $\sphericalangle ADB = C'DB$, und, da $\sphericalangle C'DB = CBD$ ist, ergiebt sich auch die Gleichheit der Winkel ADB und CBD. Demnach sind die Gegenseiten AD und BC parallel (§ 21, 4). Da durch die Voraussetzung kein Paar Gegenseiten vor dem andern bevorzugt wird, so sind je zwei Gegenseiten des betrachteten Vierecks parallel. Es ergiebt sich daher der Satz:

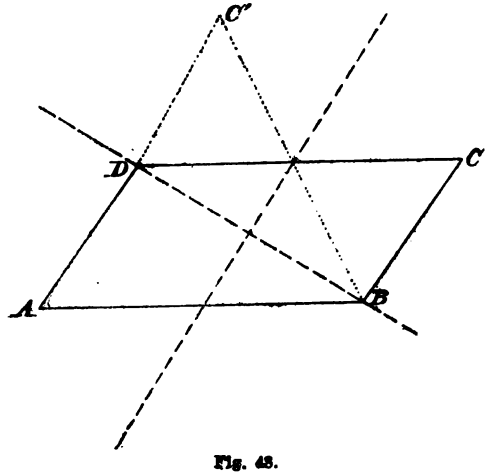


Fig. 48.

Ein Viereck, in dem je zwei Gegenseiten gleich sind, ist ein Parallelogramm.

3. $ABCD$ sei ein Viereck, in dem zwei Gegenseiten AB und CD gleich und parallel sind.

Die Parallele zu AD durch B bildet mit AD einen Streifen, dessen Ränder auf der Geraden DC eine Querstrecke bestimmen, die AB gleich ist. Folglich geht jene Parallele durch C. Somit sind auch die Gegenseiten AD und BC parallel. Daher folgt der Satz:

Ein Viereck, in dem zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

4. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Gegenseiten heißt Mittellinie, die Verbindungslinie von zwei Gegenecken Diagonale (Fig. 49).

Die Gerade, welche durch die Mittelpunkte eines Paares Gegenseiten geht, ist die Achse des Streifens, der durch das andere Paar Gegenseiten bestimmt wird; folglich ist jede Mittellinie zu einem Paar Gegenseiten parallel.

Jede Seite bildet mit der nicht zugehörigen Mittellinie ein Paar paralleler Querstrecken eines Streifens, somit ist ede Mittellinie gleich jeder Seite, zu der sie parallel ist.

Jede Mittellinie ist Querstrecke eines Streifens, dessen Achse durch die andere Mittellinie bestimmt wird; folglich ist der Schnittpunkt der Mittellinien ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt.

Jede Diagonale ist Querstrecke in jedem der beiden

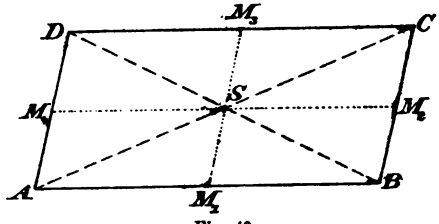


Fig. 49.

Streifen, die das Parallelogramm erzeugen; folglich liegt ihr Mittelpunkt auf der Achse jedes Streifens, mithin im Schnittpunkte der Mittellinien. Wir erhalten also die Sätze:

Jede Mittellinie eines Parallelogramms ist zu zwei Gegenseiten parallel und jeder derselben gleich. Die Mittellinien und die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich gegenseitig in demselben Punkte.

5. $ABCD$ sei ein Viereck, in dem die Diagonalen sich halbieren.

Die Parallele zu AB durch D bestimmt mit AB einen Streifen, in dem der Schnittpunkt S der beiden Diagonalen ein Punkt der Achse ist. Jene Parallele bestimmt also auf der Verlängerung von AS eine Strecke, die AS gleich ist, und geht daher durch C. Somit sind AB und CD parallel. Da durch die Voraussetzung kein Paar Gegenseiten vor dem andern bevorzugt wird, so ist auch AD zu BC parallel, und man erhält den Satz:

Ein Viereck, in dem die Diagonalen sich halbieren, ist ein Parallelogramm.

6. M, N, P, Q seien die Mittelpunkte der Seiten des Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 50).

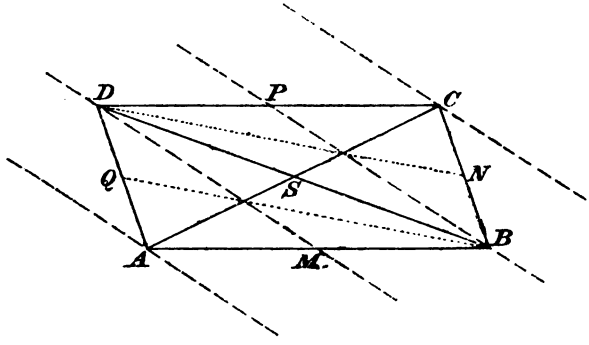


Fig. 50.

Da die Strecken BM und DP parallel und gleich sind, so ist $MBPD$ ein Parallelogramm; mithin $DM \parallel BP$. Zieht man durch die Gegenecken A und C die Parallelen zu DM, so erhält man drei Streifen, in denen die Querstrecken AM, DP, CP homolog und gleich sind. Die drei Streifen sind also kongruent, und die Diagonale AC wird durch DM und BP in drei gleiche Teile geteilt.

In derselben Weise wird gezeigt, daſs AC auch durch DN und BQ in drei gleiche Teile geteilt wird. Da diese Teilung aber nur auf eine einzige Art möglich ist, geht DN durch den Schnittpunkt von AC und BP, und BQ durch den Schnittpunkt von AC und DM. Es ergiebt sich also der Satz:

Die Verbindungslinien zweier Gegenecken eines Parallelogramms mit den Mittelpunkten der Seiten schneiden sich zu zweien auf der Diagonale, die das andere Paar Gegenecken verbindet, und teilen diese Diagonale in drei gleiche Teile.

Der Schnittpunkt S der Diagonalen ist ein Punkt auf der Achse des mittlern der drei betrachteten Streifen, er halbiert also das mittlere Drittel der Diagonale AC.

7. Wenn die Winkel eines Parallelogramms gleich sind, so ist jeder ein Rechter; das Parallelogramm heißt dann Rechteck.

Ein Parallelogramm, in dem ein Winkel ein Rechter ist, und ein Viereck, in dem drei Winkel Rechte sind, (§ 16, 4 u. 5) sind ebenfalls Rechtecke.

Jede Mittellinie eines Rechtecks ist die Mittelsenkrechte eines Paares Gegenseiten (Fig. 51), mithin sind die Hälften

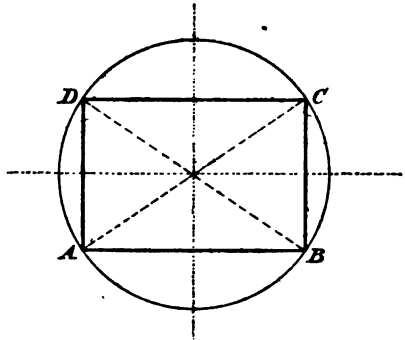


Fig. 51.

der beiden Diagonalen gleich, die Diagonalen selbst also ebenfalls gleich.

Der Schnittpunkt der Diagonalen hat gleiche Abstände von den Ecken, letztere liegen demnach auf demselben Kreise um den Schnittpunkt der Diagonalen. Dieser Kreis heißt der umgeschriebene Kreis oder der Umkreis des Rechtecks. Wir erhalten also die Sätze:

Im Rechteck sind die Diagonalen gleich.

Zu jedem Rechteck gehört ein Umkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen ist.

Der Umkreis eines Rechtecks ist bestimmt, wenn die Diagonale desselben gegeben ist.

8. Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich sind, so hat ihr Schnittpunkt von den Ecken gleiche Abstände. Da nun die Mittellinien durch den Schnittpunkt der Diagonalen gehen, so enthält jede Mittellinie zwei Punkte, die von denselben zwei Ecken gleiche Abstände haben; sie ist also die Mittelsenkrechte der Seite, die jene Ecken verbindet.

Auf dieser Seite stehen aber auch die Seiten senkrecht, die zu der betrachteten Mittellinie parallel sind. Es folgt also:

Ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen, oder ein Parallelogramm, das einen Umkreis besitzt, ist ein Rechteck.

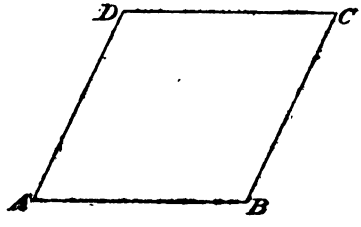


Fig. 52.

Das Rechteck kann als ein Parallelogramm betrachtet werden, dessen Mittellinien Achsen des Parallelogramms sind.

9. Sind die Seiten eines Parallelogramms gleich, so heißt es **Rhombus** oder **Raute** (Fig. 52).

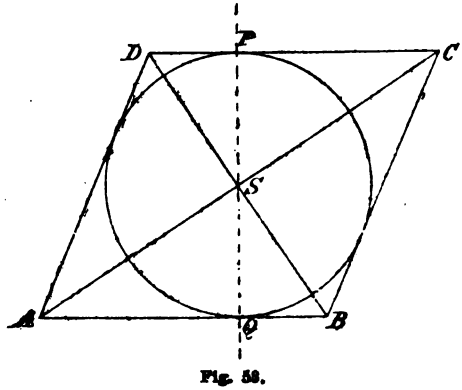


Fig. 53.

Ein Viereck, in dem die vier Seiten (§ 23, 2), und ein Parallelogramm, in dem zwei Nachbarseiten gleich sind, sind ebenfalls Rauten.

Jede Diagonale des Rhombus (Fig. 53) verbindet zwei Punkte, die von den Endpunkten der andern Diagonale

gleiche Abstände haben; sie ist also die Mittelsenkrechte der andern Diagonale. Folglich ergiebt sich:

Die Diagonalen des Rhombus stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel des Rhombus.

10. Wenn man von dem Schnittpunkte S der Diagonalen des Rhombus auf die Seite CD das Lot SP fällt (Fig. 53), so ist die Gerade SP sowohl für CD als auch für den Kreis um S mit dem Radius SP eine Achse; folglich haben der Kreis S und die Gerade CD nur den Punkt P gemein. Da nun jede Diagonale sowohl für den Rhombus als auch für den Kreis S eine Achse ist, so hat jede Seite des Rhombus mit dem Kreise S einen einzigen Punkt gemein. Der Kreis S heifst der eingeschriebene Kreis oder der Inkreis des Rhombus. Es ergiebt sich also:

Zu jedem Rhombus gehört ein Inkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen ist.

11. Den Abstand zweier Gegenseiten eines Parallelogramms nennt man Höhe. Jedes Parallelogramm hat zwei Höhen.

Zwei Nachbarseiten eines Parallelogramms sind homologe Querstrecken der beiden Streifen, die das Parallelogramm erzeugen. Ist dieses ein Rhombus, so sind die homologen Querstrecken gleich, die beiden Streifen also kongruent. Somit ergiebt sich:

Die Höhen des Rhombus sind gleich.

12. Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist jede die Mittelsenkrechte der andern. Es folgt also:

Ein Parallelogramm, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Rhombus.

Der Rhombus kann als ein Parallelogramm betrachtet werden, dessen Diagonalen Achsen des Parallelogramms sind.

13. Wenn in einem Parallelogramm die Höhen gleich sind, so sind die Streifen, die das Parallelogramm erzeugen, kongruent. Zwei Nachbarseiten sind aber homologe Querstrecken der beiden Streifen, also gleich. Es ergiebt sich demnach:

Ein Parallelogramm mit gleichen Höhen ist ein Rhombus.

Der Rhombus kann als ein Parallelogramm betrachtet werden, welches durch kongruente Streifen erzeugt wird.

14. Wenn das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 54) einen Inkreis K hat, so ist das von K auf AB gefällte Lot PQ sowohl für den Kreis K als auch für die Gerade AB eine Achse. Der Punkt, den K und AB gemein haben, liegt also

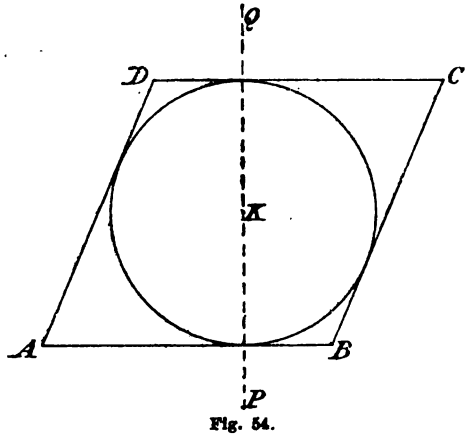


Fig. 54.

auf KP. Die Gerade PQ steht aber auch auf CD senkrecht und geht daher auch durch den gemeinschaftlichen Punkt

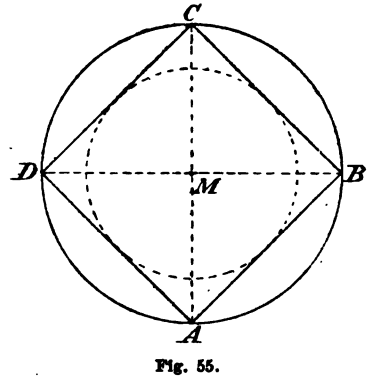


Fig. 55.

von K und DC. Die zu AB gehörige Höhe des Parallelogramms ist also dem Durchmesser des Kreises K gleich. Dasselbe gilt von der zweiten Höhe, somit sind beide einander gleich. Daher der Satz:

Ein Parallelogramm, das einen Inkreis besitzt, ist ein Rhombus.

15. **Ein Parallelogramm mit gleichen Winkeln und gleichen Seiten heifst Quadrat** (Fig. 55).

Das Quadrat besitzt die Eigenschaften des Rechtecks und die des Rhombus, also folgt:

Die Diagonalen eines Quadrats sind gleich, halbieren die Winkel des Quadrats und stehen aufeinander senkrecht.

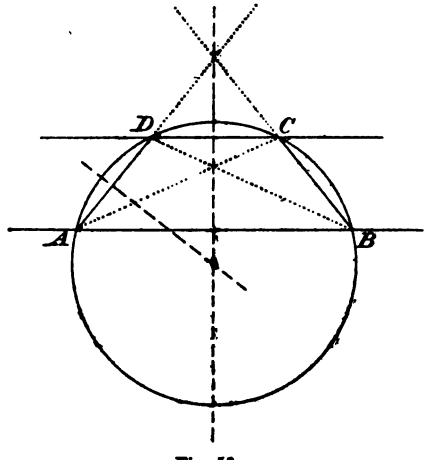


Fig. 56.

Jedes Quadrat hat einen Umkreis und einen Inkreis.

Um nachzuweisen, dafs ein Parallelogramm ein Quadrat ist, mufs gezeigt werden, dafs es ein Rhombus und ein Rechteck zugleich ist. Das Quadrat kann als ein Parallelogramm betrachtet werden, in dem sowohl die Mittellinien als auch die Diagonalen Achsen sind.

16. Zwei antiparallele Querstrecken eines Streifens, die sich nicht schneiden, begrenzen mit den Rändern eine Fläche, die **Trapez heifst. Das Trapez hat zwei parallele Gegenseiten, die Grundlinien, und zwei antiparallele, die Schenkel. Sofort ergiebt sich der Satz:**

Die Schenkel eines Trapezes (die Winkel an

derselben Grundlinie) sind gleich, Winkel an verschiedenen Grundlinien sind Supplementwinkel.

17. Durch Zusammenklappen der beiden Halbebenen, die die Mittelsenkrechte einer Grundlinie eines Trapezes bestimmt, werden die Ecken in der einen Halbebene mit den Ecken in der andern zur Deckung gebracht (Fig. 56). Jene Mittelsenkrechte ist also eine Achse des Trapezes. Somit ergeben sich die Sätze:

Die Diagonalen des Trapezes sind gleich und antiparallel.

Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Trapezes, der Schnittpunkt der Verlängerungen der Schenkel, die Mittelpunkte der Grundlinien und der Schnittpunkt der Mittellinien liegen in einer Geraden.

18. Der Punkt, in dem die Achse eines Trapezes von der Mittelsenkrechten eines Schenkels geschnitten wird (Fig. 56), hat von den vier Ecken gleiche Abstände; durch ihn geht daher auch die Mittelsenkrechte des andern Schenkels. Somit folgt:

Jedes Trapez hat einen Umkreis.

19. Zwei beliebige Querstrecken eines Streifens, die sich nicht schneiden, begrenzen mit den Rändern eine Fläche, die Trapezoid heifst. Die parallelen Gegenseiten werden auch beim Trapezoid Grundlinien, die nicht parallelen Schenkel genannt.

Die Schenkel und die Diagonalen des Trapezoids sind Querstrecken desselben Streifens (Fig. 57), also folgt:

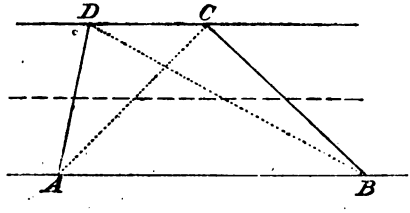


Fig. 57.

Die Mittelpunkte der Schenkel und der Diagonalen liegen in einer Geraden.

20. Wenn man in dem Trapezoid $ABCD$ (Fig. 58) durch den Mittelpunkt E des Schenkels BC zu AD die

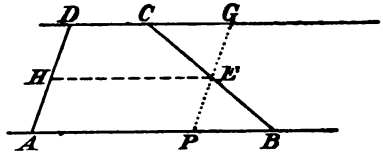


Fig. 58.

Parallele PG zieht, so ist $APGD$ ein Parallelogramm, das mit dem Trapezoid eine Mittellinie gemein hat. Diese ist also jeder der Seiten AP und DG des Parallelogramms gleich.

In dem Viereck $PBGC$ halbieren sich die Diagonalen, folglich ist es ein Parallelogramm, also:

$$PB = GC;\ AP + DG = AB + CD$$

und

$$AP = \frac{AB + CD}{2}$$

Somit ergiebt sich der Satz:

Die zu den Schenkeln eines Trapezoids gehörige Mittellinie ist gleich der halben Summe der Grundlinien.

Da jedes Trapez auch ein Trapezoid ist, so gelten die für dieses bewiesenen Sätze auch für jenes. Das Trapezoid liegt in einem einzigen Streifen, hat also nur eine Höhe.

Ubungen zu § 23.

1. Die Parallelogramme zu zeichnen, die drei gegebene Ecken gemein haben.

2. Wenn zwei Strecken einen Endpunkt gemein haben, so ist die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte halb so grofs, wie die Verbindungslinie der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte. (Eine Seite und

eine Diagonale eines Parallelogramms sind zwei solche Strecken.)

3. Die Mittelpunkte der Seiten eines Parallelogramms sind die Ecken eines zweiten Parallelogramms, dessen Seiten den halben Diagonalen des ersten beziehungsweise gleich sind und durch die Diagonalen des ersten halbiert werden.

4. Eine Strecke zu zeichnen, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels liegen, und die durch einen gegebenen Punkt halbiert wird. (Jede Diagonale eines Parallelogramms kann als eine solche Strecke betrachtet werden. Siehe § 22, Übung No. 20).

5. Eine Strecke von gegebener Länge zu zeichnen, deren Endpunkte auf zwei gegebenen Geraden liegen, und die zu einer dritten gegebenen Geraden parallel ist. (Wenn man auf der dritten Geraden von einem ihrer Schnittpunkte mit den beiden ersten aus die gegebene Länge abträgt, so sind die Endpunkte dieser Strecke und der gesuchten die Ecken eines Parallelogramms.)

6. Ein Viereck, in dem eine Diagonale und eine Mittellinie sich halbieren, ist ein Parallelogramm.

7. Wenn man von zwei Gegenecken eines Parallelogramms aus auf Gegenseiten gleiche Strecken abträgt, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte der abgetragenen Strecken durch den Schnittpunkt der Diagonalen.

8. Die Achse eines gegebenen Streifens mit Hilfe von zwei Kreisen und vier Geraden zu konstruieren.

9. Die Mittelsenkrechten zweier Gegenseiten eines Parallelogramms bestimmen einen Streifen, dessen Achse durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht.

10. Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Parallelogramms bestimmen ein zweites Parallelogramm, das mit dem gegebenen in den Winkeln übereinstimmt, und dessen Diagonalen und Mittellinien sich in demselben Punkte schneiden, wie die Diagonalen und Mittellinien des gegebenen Parallelogramms.

11. Die Verbindungslinien einer Ecke eines Parallelogramms mit den Mittelpunkten der nicht zugehörigen Seiten werden durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte der zu der Ecke gehörigen Seiten und durch die nicht zu der Ecke gehörige Diagonale in drei gleiche Teile geteilt.

12. Die Mittelpunkte der Seiten eines Rechtecks sind die Ecken eines Rhombus, dessen Winkel den Winkeln der Diagonalen des Rechtecks beziehungsweise gleich sind.

13. Die Mittelpunkte der Seiten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten den halben Diagonalen des Rhombus beziehungsweise gleich sind.

14. Die Mittelpunkte der Seiten eines Quadrats sind die Ecken eines zweiten Quadrats, dessen Seite der halben Diagonale des ersten gleich ist.

15. Die Mittellinien des Rechtecks halbieren die Winkel der Diagonalen, und die Diagonalen des Rhombus halbieren die Winkel der Mittellinien. Die Mittellinien und die Diagonalen des Quadrats teilen die Ebene in acht gleiche Teile. (Man betrachte jede Figur als eine symmetrische.)

16. Die Halbierungslinien der Winkel eines Parallelogramms bestimmen ein Rechteck.

17. Die Halbierungslinien der Winkel eines Rechtecks bestimmen ein Quadrat, dessen Diagonalen beziehungsweise in den Achsen des Rechtecks liegen.

18. Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Rhombus bestimmen einen zweiten Rhombus, dessen Achsen mit den Achsen des ersten beziehungsweise zusammenfallen. (Zwei Mittelsenkrechte, die nicht parallel sind, schneiden sich auf einer Diagonale des Rhombus.)

19. Die Endpunkte von zwei Durchmessern eines Kreises sind die Ecken eines Rechtecks.

20. Jede Strecke, die zwei Punkte verschiedener Schenkel eines rechten Winkels verbindet, ist Durchmesser eines Kreises, der durch den Scheitel geht. (Die Figur kann zu einem Rechteck ergänzt werden.)

21. Wieviel Kreise sind erforderlich, um ein Rechteck zu bestimmen? (Siehe No. 19.)

22. Die Mittelsenkrechten von zwei Gegenseiten eines Parallelogramms bestimmen mit diesen ein Rechteck, dessen Diagonalen und Mittellinien sich in demselben Punkte schneiden, wie die Diagonalen und Mittellinien des Parallelogramms. (Eine Diagonale des Parallelogramms und eine Diagonale des Rechtecks sind Diagonalen eines und desselben neuen Parallelogramms.)

23. Die Mittelpunkte der Seiten eines Trapezes sind die Ecken eines Rhombus, dessen Seite der halben Diagonale des Trapezes gleich ist.

24. Die Endpunkte paralleler Sehnen eines Kreises sind die Ecken eines Trapezes. (Die Figur hat eine Achse.)

25. Zwei Mittelpunktstrahlen konzentrischer Kreise bestimmen auf den Kreislinien die Ecken eines Trapezes. (Die Figur hat eine Achse.)

26. Wenn zwei gleiche Strecken sich so teilen, dafs die Abschnitte der einen den Abschnitten der andern beziehungsweise gleich sind, so sind die Endpunkte der Strecken die Ecken eines Trapezes. (Zwei gleiche Abschnitte beider Strecken können als gleiche Querstrecken eines Streifens betrachtet werden, die gegebenen Strecken sind also antiparallel. Der Rest des Beweises ist ähnlich wie bei dem Lehrsatze No. 3 des vorliegenden Paragraphen.)

27. Wenn die Verlängerungen von zwei gleichen Strecken sich so schneiden, dafs auch sie gleich sind, so sind die Endpunkte der Strecken die Ecken eines Trapezes.

28. Wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei Strecken eine Verbindungslinie ihrer Endpunkte halbiert, so sind die Endpunkte der Strecken die Ecken eines Trapezoids. Unter welcher Bedingung ist das Trapezoid ein Trapez? (Zwei Verbindungslinien von zwei nicht verbundenen Endpunkten sind zur Verbindungslinie der Mittelpunkte parallel.)

29. Die Mittelpunkte der Seiten eines Trapezoids sind die Ecken eines Parallelogramms.

Vorbemerkungen. Im Streifeneck sollen folgende Bezeichnungen gelten: 1) für die Ecken: A, B, C, D; 2) für die Winkel: $\sphericalangle DAB = a$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$; 3) für die Seiten: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; 4) für die Diagonalen: $AC = e$, $BD = f$; 5) für die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, d beziehungsweise: M_1, M_2, M_3, M_4; 6) für den Schnittpunkt der Diagonalen: S; 7) für die Mittellinien: $M_1 M_3 = m_1$, $M_2 M_4 = m_2$; 8) für die Höhen: h_1 oder h_2, je nachdem die Höhe auf a oder auf b senkrecht steht; h, wenn beide Höhen gleich sind, oder das Streifeneck nur eine Höhe hat; 9) für einen Punkt, der auf den Geraden a, b, c, d, e, f, m_1, m_2 als gegeben vorausgesetzt wird, beziehungsweise: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$; 10) für

den Radius und den Mittelpunkt des Umkreises beziehungsweise: r, U; 11) für den Radius und den Mittelpunkt des Inkreises beziehungsweise: ϱ, J.

Bei den folgenden Parallelogrammkonstruktionen unterscheide man drei Fälle: 1) die Angaben enthalten nur einfache Gröſsen (Seiten, Diagonalen, Winkel u. s. w.), 2) die Angaben enthalten Punkte, deren Lage vorgeschrieben ist, 3) die Angaben enthalten Aggregate von einfachen Gröſsen. Jeder der drei Fälle soll an einem Beispiele erläutert werden.

1. Fall. Von einem Parallelogramm kennt man: c, $\sphericalangle(ae)$, h_1.

Man zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit der Diagonale AC. Die Seite c bestimmt die Punkte C und D. Nach dem Satze über entsprechende Streifenwinkel ist $\sphericalangle DCA=(ae)$, folglich der erste Ort für A der Strahl durch C, der mit dem Strahle CD einen Winkel einschlieſst, welcher gleich $\sphericalangle(ae)$ ist. Die Gerade AB hat von ihrer Parallele CD den Abstand h_1, folglich ist der 2. Ort für A und der erste für B die Parallele zu CD im Abstande h_1. Da im Parallelogramm die Gegenseiten gleich sind, so ist $BA=c$, folglich der 2. Ort für B der Kreis um A mit dem Radius c.

Oder: Der Winkel (ae) bestimmt den Punkt A und je einen Ort für B und C. Da im Parallelogramm die Gegenseiten gleich sind, so ist $BA=c$, also der 2. Ort für B der Kreis um A mit dem Radius c. Die Gerade CD hat von ihrer Parallele AB den Abstand h_1, folglich ist der 2. Ort für C und der 1. Ort für D die Parallele zu AB im Abstande h_1. Da $DC=c$ ist, so ist der 2. Ort für D der Kreis um C mit dem Radius c.

Oder auch: Ein Streifen von der Breite h_1 ist konstruierbar, seine Ränder geben je einen Ort für A, B, C und D. Da ein Parallelogramm in jedem seiner Streifen verschoben werden kann, so darf der Punkt A auf dem einen Rande willkürlich angenommen werden. Der Winkel CAB ist gleich (ae), folglich ist der 2. Ort für C der Strahl durch A, der mit dem durch A gehenden Rande den gegebenen Winkel (ae) einschlieſst. Da $DC=c$ ist, so ist der 2. Ort für D der Kreis um C mit dem Radius c. Im Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich, folglich ist $BA=c$, und der 2. Ort für B der Kreis um A mit dem Radius c.

Aus den vorstehenden Zergliederungen (Analysen) der gestellten Aufgabe ergeben sich folgende Regeln:

Je nachdem als Ausgang der Abstand zweier Punkte oder ein Winkel oder der Abstand zweier Parallelen dient, legt man zwei Punkte, oder einen Punkt und je einen Ort für die auf den Schenkeln liegenden Punkte, oder einen Punkt und je einen Ort für die Punkte der Ränder fest. Der weitere Verlauf der Analyse bezweckt, für die noch nicht als konstruierbar nachgewiesenen Ecken des Parallelogramms mit Hilfe der noch nicht benutzten Angaben und der für das Parallelogramm geltenden Lehrsätze einen zweiten Ort, bezw. je zwei Orte, aufzusuchen. In diesem weitern Verlaufe ist festzuhalten: eine als Abstand zweier Punkte aufzufassende Strecke (Seite, Diagonale, Mittellinie) liefert für ihren einen Endpunkt einen Ort, wenn der andere Endpunkt schon früher als konstruierbar nachgewiesen ist; ein bekannter Winkel giebt einen Ort für die auf dem einen Schenkel liegenden Punkte, wofern der Scheitel des Winkels und der andere Schenkel bereits früher festgelegt sind; eine als Streifenbreite aufzufassende Strecke (Höhe) liefert einen Ort für die auf dem einen Rande liegenden Punkte, wenn der andere Rand schon vorher konstruiert gedacht ist.

2. Fall. Von einem Parallelogramm sind gegeben: M_1, M_2, $\mathfrak{E}$, $\sphericalangle(ae)$.

Man zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit den Seitenmittelpunkten M_1 und M_2 und nehme auf der Diagonale AC einen Punkt $\mathfrak{E}$ an. Die Punkte M_1, M_2 und $\mathfrak{E}$ sind als gegeben anzusehen. Wenn zwei Strecken einen Endpunkt gemein haben, so ist die Verbindungslinie der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte zur Verbindungslinie der Mittelpunkte parallel; folglich ist der 1. Ort für A und C die Parallele durch $\mathfrak{E}$ zu M_1M_2. Der Winkel $\mathfrak{E}AM_1$ ist gleich (ae), daher ist der 2. Ort für A und der 1. für B eine Gerade durch M_1, die mit dem 1. Orte für A einen Winkel bestimmt, der gleich dem gegebenen Winkel (ae) ist. Da $BM_1 = AM_1$ ist, so ist der 2. Ort für B der Kreis um M_1 mit dem Radius AM_1. Der 2. Ort für C ist die Gerade BM_2. Im Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten gleich, somit sind die Orte für D der Kreis um A mit dem Radius BC und der Kreis um C mit dem Radius AB.

205753

3. Fall. Wenn aufser der Summe oder der Differenz zweier Strecken die eine gegeben ist, so kann auch die andere konstruiert werden. Kennt man von zwei Strecken die Summe und die Differenz, so ist jede von ihnen konstruierbar (§ 18, Übung No. 12). Man wird also auf den Fall zurückgeführt, wo nur einfache Strecken gegeben sind. Andernfalls kommt beim Trapezoid der Satz No. 20 in Betracht, oder es mufs das gegebene Aggregat durch passendes Abtragen in die Figur eingezeichnet werden.

30. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus:

1) a, b, f 2) a, b, α 3) $a, f, \sphericalangle(df)$
4) $c, f, \sphericalangle(ae)$ 5) $a, f, \sphericalangle(fe)$ 6) $a, h_1, \sphericalangle(ae)$
7) a, h_2, e 8) $m_1, m_2, \sphericalangle(m_1 m_2)$ 9) $h_1, \sphericalangle(de), \sphericalangle(ae)$
10) a, h_1, h_2 11) $a+b, a-b, e$ 12) $e+f, e-f, \sphericalangle(ae)$
13) M_1, M_2, M_3 14) M_1, M_2, S 15) $A, M_2, M_3,$
16) S, M_2, A 17) C, D, M_1 18) S, D, M_4
19) $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, A, S$ 20) $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, M_3, S$ 21) $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, M_2, M_3$
22) $\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1, M_4, S$ 23) $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, M_2, M_4$ 24) $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}_2, M_1, M_4$
25) $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, S, M_3$ 26) $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}_2, D, M_1$.

31. Ein Rechteck zu zeichnen aus:

1) a, f 2) $\sphericalangle(ae), f$ 3) $\sphericalangle(ef), a$
4) $\sphericalangle(ae), b$ 5) $r, \sphericalangle(ef)$ 6) $a+b, a-b$
7) $e-a, e+c$ 8) $M_1, S, \sphericalangle(ef)$ 9) $M_2, M_4, \sphericalangle(ef)$
10) $M_1, M_4, \sphericalangle(ae)$ 11) $\mathfrak{C}, A, S$ 12) $\mathfrak{D}, A, M_2$
13) $\mathfrak{B}, D, M_2$ 14) $\mathfrak{E}, M_1, M_3$ 15) $\mathfrak{E}, D, M_1$
16) $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, A$ 17) $\mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}_2, M_4$ 18) $A, C, \sphericalangle(ef)$

32. Einen Rhombus zu zeichnen, von dem man kennt:

1) $a, \sphericalangle(ae)$ 2) $\sphericalangle(ae), h$ 3) h, e
4) a, h 5) $e+f, e-f$ 6) ϱ, e
7) ϱ, a 8) M_1, M_2, f 9) $M_1, M_2, \sphericalangle(af)$
10) M_1, M_2, β 11) M_2, M_4, α 12) $\mathfrak{E}, D, M_1$
13) $\mathfrak{F}, D, M_1$ 14) $\mathfrak{C}, A, M_3$ 15) $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{M}_1, A$
16) A, B, h 17) $\mathfrak{E}, J, M_1$.

33. Ein Quadrat zu zeichnen, wenn man kennt:

1) e 2) M_1, M_3 3) A, S 4) M_1, M_2 5) $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, A
6) $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, B 7) U, r, $\mathfrak{E}$.

34. Ein Trapez zu zeichnen, von dem gegeben sind:

1) a, b, h 2) a, e, h 3) a, h, e
4) a, h, r 5) b, h, r 6) a, r, $\measuredangle(ef)$
7) $a+b$, $a-b$, h 8) c, e, a 9) $a+c$, h, b
10) $a+b+c, a-b+c, h$ 11) $\measuredangle(bd), a+c, r$ 12) $a+c$, a, r
13) $a+c$, h, β 14) $a-c$, a, r 15) $a-c$, h, r
16) $\measuredangle(bd)$, m_2, a 17) $\measuredangle(bd)$, c, r 18) A, M_1, M_2
19) M_1, S, D 20) A, B, M_4 21) A, M_2, M_3
22) $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{M}_1$, A, M_3

35. Ein Trapezoid zu zeichnen, wenn bekannt sind:

1) a, c, h, e 2) b, d, e, β
3) $a+c$, a, β, h 4) $a+c$, h, b, f
5) $a+c$, b, m_1, $\measuredangle(m_1 m_2)$ 6) $\measuredangle(bd)$, a, $a+c$, h
7) $a-c$, a, β, e 8) $a-c$, h, β, f
9) A, M_1, M_2, c 10) A, B, S, h
11) A, B, M_4, $a+c$ 12) $a-\beta$, a, b, d.

Neuntes Kapitel.

Die Parallele und die Winkelhalbierende.

§ 24. Die Parallele.

1. Sei AB eine Strecke, M ihr Mittelpunkt, g ihre Mittelsenkrechte (Fig. 59).

Ist C ein Punkt von g, so ist die gebrochene Linie ACB gröfser als die Strecke AB, folglich auch die Hälfte der gebrochenen Linie gröfser als die Hälfte der Strecke; mithin $AC > AM$. Das von A auf g gefällte Lot ist also die kürzeste Verbindungslinie zwischen A und

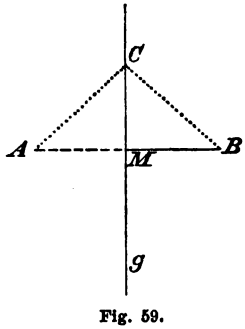


Fig. 59.

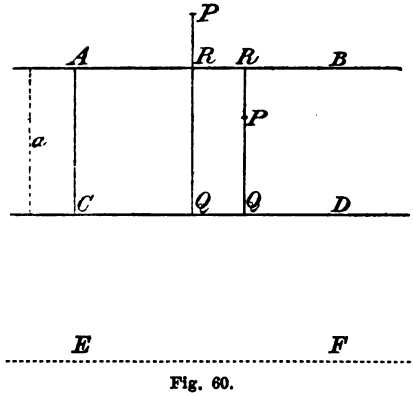


Fig. 60.

einem Punkte der Geraden g. Diese kürzeste Verbindungslinie heifst der Abstand des Punktes A und der Geraden g.

2. AB und CD seien zwei Parallelen, a ihr Abstand (Fig. 60).

Das von A auf CD gefällte Lot AC ist sowohl der Abstand des Punktes A von der Geraden CD, als auch der Abstand der beiden Parallelen. Für jeden Punkt der einen Parallelen ist also der Abstand von der andern gleich dem Abstande der Parallelen.

Die Gerade CD bestimmt zwei Halbebenen. Sei P ein beliebiger Punkt der Halbebene A, PQ sein Abstand von CD, R der Schnittpunkt der Geraden PQ und AB. Dann ist $QR = a$. Je nachdem nun P innerhalb oder aufserhalb des Streifens angenommen wird, ist PQ ein Teil von RQ, also $PQ < a$, oder RQ ein Teil von PQ, also $PQ > a$. Die Gesamtheit der Punkte auf der Geraden AB ist somit identisch mit der Gesamtheit der Punkte der Halbebene A, die von CD den Abstand a haben.

Durch Zusammenklappen der durch CD bestimmten Halbebenen kommt die Gerade AB der einen Halbebene mit einer Geraden EF der andern zur Deckung. Die Gerade EF hat somit für ihre Halbebene dieselbe Bedeutung, wie die Gerade AB für die erstere. Demnach ergiebt sich der Satz:

Der Ort für alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand haben, besteht aus zwei Parallelen zu der gegebenen Geraden, die von ihr den gegebenen Abstand haben.

3. AB und EF liegen symmetrisch bezüglich CD (Fig. 60), folglich ist CD die Achse des durch AB und EF bestimmten Streifens. Die Gesamtheit der Punkte von CD ist daher identisch mit der Gesamtheit der Punkte, die von AB und EF gleiche Abstände haben. Oder:

Der Ort für alle Punkte, die von zwei gegebenen Parallelen gleiche Abstände haben, ist die Achse ihres Streifens.

4. Sei P ein Punkt aufserhalb des durch AB und CD gebildeten Streifens (Fig. 60); PQ, PR, PM seine Abstände von den Rändern und von der Achse.

Es ist: $PQ + PR = (PM + MQ) + (PM - MR)$. Da aber $MQ = MR$ ist, so folgt:

$$PQ + PR = 2\,PM$$

oder:

$$\frac{PQ + PR}{2} = PM.$$

In Worten: Die halbe Summe der Abstände des gegebenen Punktes von den Rändern des Streifens ist gleich seinem Abstande von der Streifenachse.

Wenn P ein Punkt des Streifens aufserhalb der Streifenachse ist, so ergiebt sich:

$$PQ - PR = (MQ + MP) - (MR - MP), \text{ folglich:}$$

$$\frac{PQ - PR}{2} = PM.$$

In Worten: Die halbe Differenz der Abstände des gegebenen Punktes von den Streifenrändern ist gleich seinem Abstande von der Achse. Wenn daher für einen Punkt die Summe oder die Differenz seiner Abstände von den Rändern eines Streifens vorgeschrieben ist, so ist auch der Abstand des Punktes von der Streifenachse bestimmt. Also folgt:

Der Ort für alle Punkte, für welche die Summe (Differenz) der Abstände von den Rändern eines gegebenen Streifens einer gegebenen Strecke gleich ist, besteht aus den beiden Parallelen zur Streifenachse, deren Achsenabstand gleich der Hälfte der gegebenen Summe (Differenz) ist.

Übungen zu § 24.

1. Auf einem gegebenen Kreise Punkte zu finden, die von einer gegebenen Geraden den Abstand a haben. Wieviel Punkte giebt es höchstens?

2. Punkte zu konstruieren, die von einer gegebenen Geraden den Abstand a und von einer zweiten gegebenen Geraden den Abstand b haben. Wieviel Punkte giebt es im allgemeinen? Unter welcher Bedingung kann durch die erhaltenen Punkte ein Kreis gelegt werden? Unter welcher Bedingung bestimmen sie einen Rhombus? Wenn die gegebenen Geraden parallel sind, welche Beziehung mufs zwischen ihrem Abstande und den gegebenen Abständen bestehen, damit es Punkte gebe, die der gestellten Forderung genügen, und zwar unzählig viele Punkte?

3. Mit gegebenem Radius r Kreise zu zeichnen, deren Mittelpunkte von einer gegebenen Geraden den Abstand a haben, und die durch einen gegebenen Punkt P gehen.

4. Punkte zu finden, die von einer gegebenen Geraden den Abstand a und von einem gegebenen Punkte den Abstand b haben.

5. Einen Punkt zu finden, der von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkte gleiche Abstände hat.

6. Eine Gerade zu zeichnen, die von einer gegebenen Geraden und von einem gegebenen Punkte gleiche Abstände hat.

7. Zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen, die von einem gegebenen Punkte den Abstand a hat.

8. Einen Punkt zu finden, der von zwei gegebenen Parallelen gleiche Abstände und von einer dritten gegebenen Geraden den Abstand b hat.

9. Durch einen Punkt der Kreislinie M eine Gerade zu ziehen, deren Mittelpunktsabstand gleich dem Radius ist. Wieviel Punkte haben Kreis und Gerade gemein?

10. Wenn in einem Parallelogramm der Schnittpunkt der Diagonalen von den Seiten gleiche Abstände hat, so ist das Parallelogramm ein Rhombus.

11. Welches ist die kleinste Querstrecke eines Streifens?

12. Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Strecke geht, hat von den Endpunkten gleiche Abstände. Welche unter diesen Geraden hat die gröfsten Abstände von den Endpunkten?

13. Auf der Strecke AB oder auf deren Verlängerung einen Punkt P so zu bestimmen, dafs jede Gerade, die durch P geht, von A einen doppelt oder dreimal so grofsen Abstand hat wie von B.

14. Punkte zu finden, für welche die Summe (Differenz) der Abstände von zwei gegebenen Parallelen gleich a ist, und die zugleich von einer dritten gegebenen Geraden den Abstand b haben.

15. Eine Gerade zu zeichnen, für welche die Summe (Differenz) der Abstände von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden vorgeschrieben ist.

16. Eine Gerade zu zeichnen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist, und für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Strecke gleich ist.

17. Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Strecke gleich ist. (Die beiden letzten Punkte sind Gegenecken eines Rechtecks, dessen eine Seite der gegebenen Strecke gleich ist).

§ 25. Die Winkelhalbierende.

1. P sei ein Punkt der Halbierungslinie des Winkels ASB, PA und PB seine Abstände von den Schenkeln (Fig. 61). Durch Zusammenklappen der Halbebenen A und B um die Gerade SP kommen die Schenkel zur Deckung, also auch die Lote PA und PB, da durch jeden Punkt eine einzige Senkrechte zu einer gegebenen Geraden gelegt werden kann. Die Punkte der Halbierungslinie haben also von den Schenkeln gleiche Abstände.

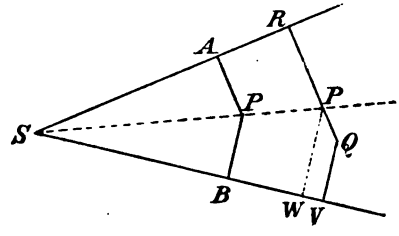


Fig. 61.

Sei Q ein Punkt, der nicht auf der Halbierungslinie liegt, QR und QV seine Abstände von den Schenkeln.

Wird Q in der Halbebene V angenommen, so verbindet QR zwei Punkte verschiedener Halbebenen und schneidet daher die gemeinschaftliche Grenze beider in einem Punkte P. Durch Zusammenklappen der Halbebenen V und R um SP kommen die Lote PR und PW zur Deckung. Die Strecke QR geht in die gebrochene Linie QPW über, welche gröfser als QW, mithin auch gröfser als das Lot QV ist. Jeder Punkt der Halbebene V liegt also dem dieser Halbebene angehörigen Schenkel näher als dem andern. So liegen auch die Punkte der Halbebene R dem Schenkel SR näher als dem Schenkel SV.

Die Gesamtheit der Punkte des Strahles SP ist somit identisch mit der Gesamtheit der Punkte der Winkelfläche ASB, die von den Strahlen SR und SV gleiche Abstände haben. Berücksichtigt man, dafs die Geraden AS und BS die Ebene in zwei Paare von Scheitelwinkeln teilen, und dafs Scheitelwinkel durch dieselbe Gerade halbiert werden, so ergiebt sich der Satz:

Der Ort für alle Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleiche Abstände haben, besteht aus den beiden Geraden, die die Winkel der gegebenen halbieren.

2. Eine Quergerade schneide die Ränder eines Streifens von der Breite a in A und B (Fig. 62), die Achse in M. Die Geraden AC und AD seien die Halbierungslinien der

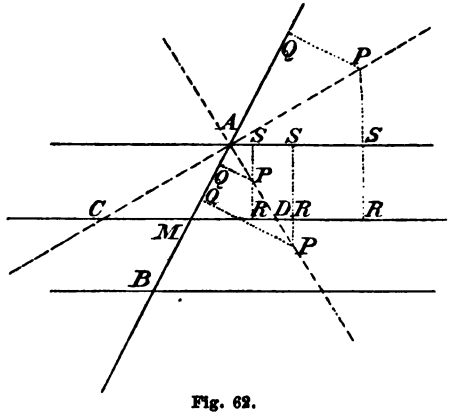


Fig. 62.

Winkel in A, P ein Punkt einer dieser Halbierungslinien, PQ, PR und PS seine Abstände von der Quergeraden, der Streifenachse und dem durch A gehenden Streifenrande.

Wenn P innerhalb des durch AS und die Achse gebildeten Halbstreifens liegt, so ist $PR + PS = \frac{a}{2}$. Da aber $PQ = PS$ ist, so folgt: $PR + PQ = \frac{a}{2}$. In Worten: die Summe der Abstände des Punktes P von der Streifenachse und der Quergeraden ist gleich der halben Breite des Streifens.

Wird P aufserhalb des genannten Halbstreifens angenommen, so ist entweder $PR - PS = \frac{a}{2}$, oder $PS - PR = \frac{a}{2}$, je nachdem P bezüglich der Streifenachse in der Halbebene A oder in der Halbebene B liegt. In beiden Fällen ist aber $PQ = PS$, folglich im ersten Falle: $PR - PQ = \frac{a}{2}$, im zweiten: $PQ - PR = \frac{a}{2}$. In Worten: die Abstände des Punktes

P von der Streifenachse und der Quergeraden unterscheiden sich um die halbe Breite des Streifens.

Da die Halbierungslinien nicht entsprechender Streifenwinkel aufeinander senkrecht stehen, so ist AD senkrecht zur Halbierungslinie MZ des Winkels AMD (MZ ist in Fig. 62 weggelassen); mithin ist MZ die Achse der Geraden AD. MZ ist aber auch die Achse des Winkels AMD, folglich die Achse der Punkte A und D; also $MD = MA$. Ebenso wird bewiesen, daſs $MC = MA$ ist.

Die Punkte der Winkelhalbierenden in B haben beziehungsweise dieselben Eigenschaften, wie die Punkte der Geraden AC und AD: die Summe oder die Differenz ihrer Abstände von der Streifenachse und der Quergeraden AB ist gleich der halben Streifenbreite. Ferner schneiden jene Winkelhalbierenden die Achse des Streifens in Punkten, die von M den Abstand MB haben. Da nun $MB = MA$ ist, so sind BC und BD die Halbierungslinien der Streifenwinkel in B.

Die Punkte $ABCD$ sind die Seiten eines Rechtecks, von dem die Gegenecken A und B durch die Quergerade bestimmt werden; die beiden andern Gegenecken sind die Schnittpunkte der Streifenachse und des Kreises, der die Querstrecke AB zum Durchmesser hat.

Um die Figur herzustellen, kann man von zwei beliebigen Geraden MR und MQ ausgehen, die sich schneiden. Zieht man zu MR die Parallele im Abstande b, die MQ in A schneidet, so bestimmt der Kreis um A mit dem Radius MA auf den gegebenen Geraden die Punkte B, C und D. Es ergiebt sich dann:

Die Gesamtheit der Punkte auf den Seiten des Rechtecks $ACBD$ ist identisch mit der Gesamtheit der Punkte, für welche die Summe der Abstände von den Geraden AB und CD gleich b ist, und die Gesamtheit der Punkte, die auf den Verlängerungen der Rechteckseiten liegen, ist identisch mit der Gesamtheit der Punkte, für welche die Differenz der Abstände von den Geraden AB und CD gleich b ist. In andern Worten:

Der Ort für alle Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei gegebenen Geraden gleich b ist, besteht aus den Seiten eines Rechtecks, dessen Ecken auf den gegebenen Geraden liegen,

und zwar hat jede Ecke den Abstand b von der Geraden, auf der sie nicht liegt.

Der Ort für alle Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Geraden gleich b ist, besteht aus den Verlängerungen der Seiten des vorigen Rechtecks.

Ubungen zu § 25.

1. Auf einer gegebenen Geraden Punkte zu bestimmen, die von zwei gegebenen Geraden gleiche Abstände haben. Wieviel solcher Punkte giebt es im allgemeinen, und unter welcher Bedingung giebt es nur einen?

2. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt von zwei gegebenen Geraden gleiche Abstände hat, und der durch einen gegebenen Punkt geht.

3. Unter welcher Bedingung bestimmen die Halbierungslinien aller Streifenwinkel, die durch einen gegebenen Streifen und eine Quergerade gebildet werden, ein Quadrat?

4. Mit Hilfe von drei Kreisen die Halbierungslinien aller Streifenwinkel zu zeichnen, die durch einen gegebenen Streifen und eine gegebene Quergerade bestimmt werden.

5. Punkte zu finden, für welche die Summe (Differenz) der Abstände von zwei gegebenen Geraden gleich a ist, und die auf einer gegebenen Geraden liegen. Wieviel Punkte giebt es im allgemeinen?

6. Die Lote, welche von einem Punkte des gemeinschaftlichen Schenkels zweier Nebenwinkel auf deren Halbierungslinien gefällt werden, bestimmen auf den nicht gemeinschaftlichen Schenkeln eine Strecke, die durch den Scheitel halbiert wird.

7. Zur Herstellung eines Streifens und der Halbierungslinien von acht Streifenwinkeln, die durch dieselbe Quergerade bestimmt werden, sind zwei Kreise erforderlich. (Die Endpunkte von zwei Durchmessern eines Kreises bestimmen den Streifen, der Mittelpunkt des Kreises einen Punkt der Achse. Drei von den Endpunkten der Durchmesser und ein mit Hilfe eines zweiten Kreises zu konstruierender Punkt bestimmen ein Parallelogramm, dessen Diagonalenschnittpunkt ein zweiter Punkt der Streifenachse ist.)

8. Welches ist der Ort für alle Punkte, für welche die Summe (Differenz) der Abstände von den Diagonalen eines gegebenen Quadrats gleich der halben Diagonale ist?

9. Welches ist der Ort für alle Punkte, für die die Summe (Differenz) der Abstände von den Mittellinien eines gegebenen Quadrats gleich der halben Seite ist?

10. Auf den Seiten eines Rhombus oder auf deren Verlängerungen Punkte zu finden, für welche die Differenz oder die Summe der Abstände von den beiden Diagonalen gleich der Hälfte der einen Diagonale ist.

11. Auf einem gegebenen Kreise Punkte zu finden, für welche die Summe der Abstände von zwei gegebenen Durchmessern gleich dem Radius ist.

12. Für alle Punkte auf den Seiten eines Rechtecks sind die Summen der Abstände von den Diagonalen einander gleich.

13. Je zwei Parallelen, die in gleichen Abständen zu der Diagonale eines Quadrats gezogen sind und die Seiten schneiden, bestimmen auf diesen die Ecken von Rechtecken, deren Umfänge gleich sind.

14. Je zwei Parallelen, die in gleichen Abständen von der Diagonale eines Quadrats die Verlängerungen der Seiten schneiden, bestimmen auf diesen die Ecken von Rechtecken, für welche die Differenzen zweier Nachbarseiten gleich sind.

Zehntes Kapitel.

Schnitt und Berührung.

§ 26. Kreis und Gerade.

1. Wenn von dem Punkte P das Lot PM auf die Gerade g gefällt wird (Fig. 63), so hat von allen Punkten der Geraden der Punkt M den kleinsten Abstand von P.

Sei Q der symmetrische Punkt zu P bezüglich g; C und D seien zwei beliebige Punkte von g in derselben Richtung von M aus, aber $MC > MD$; F der Schnittpunkt von PD und QC.

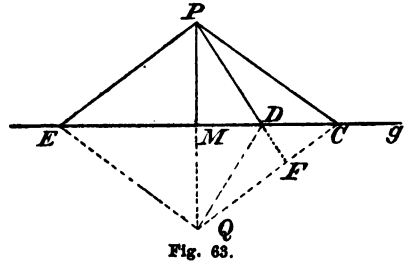


Fig. 63.

Die gebrochenen Linien PCQ, PFQ und PDQ können durch folgende Summen ersetzt werden:

1) $PCQ = PC + CF + FQ$ 2) $PFQ = PF + FQ$

3) $PDQ = PD + DQ$ 4) $PFQ = PD + DF + FQ$.

Die Vergleichung der beiden ersten Summen lehrt, dafs $PCQ > PFQ$ ist; die Vergleichung der beiden letzten ergiebt, dafs $PDQ < PFQ$ ist. Folglich ist auch $PCQ > PDQ$ und $\frac{1}{2} PCQ > \frac{1}{2} PDQ$, also $PC > PD$.

Wird auf g ein Punkt E so angenommen, dafs $EM = CM$ ist, so ist PQ die Mittelsenkrechte von CE; mithin $PC = PE$. Wir gelangen daher zu folgendem Ergebnis:

Bewegt sich ein Punkt auf der Geraden g, so nehmen seine Abstände von dem beliebig angenommenen Punkte P und von dem Fufspunkte des von P auf g gefällten Lotes gleichzeitig zu oder gleichzeitig ab, und es giebt zwei, aber nur zwei Lagen, in denen der sich bewegende Punkt von P einen vorgeschriebenen Abstand a hat, der gröfser als der Abstand des Punktes P und der Geraden g ist.

Wenn man um P einen Kreis beschreibt, dessen Radius kleiner als PM ist, so liegt M aufserhalb des Kreises P; folglich jeder andere Punkt von g ebenfalls. Ist der Radius des Kreises P gleich PM, so liegt M auf dem Kreise, jeder andere Punkt von g aufserhalb. Wenn der Radius des Kreises P gröfser als PM gewählt wird, so giebt es auf g zwei, aber nur zwei Punkte, deren Abstand von P gleich dem Radius des Kreises ist, die also auf dem Kreise liegen. Somit ergiebt sich der Satz:

Eine Gerade und ein Kreis haben keinen oder einen oder zwei Punkte gemein, je nachdem der Mittelpunktsabstand der Geraden gröfser als der Radius, gleich dem Radius oder kleiner als der Radius ist.

2. Wird ein Kreis von einer Geraden geschnitten, so mufs von drei Annahmen die eine zutreffen: entweder ist der Mittelpunktsabstand der Geraden kleiner als der Radius oder gleich diesem oder gröfser als dieser. Da die erste Annahme allein mit dem vorhin bewiesenen Satze im Einklang steht, so ist sie die zutreffende.

Durch Betrachtung eines Kreises, der mit einer gegebenen Geraden keinen, beziehungsweise einen Punkt, gemein hat, gelangt man durch ähnliche Schlüsse wie vorhin zu dem vollständigen Beweise des Satzes:

Eine Gerade hat bezüglich eines Kreises einen Mittelpunktsabstand, der kleiner als der Radius, gleich dem Radius oder gröfser als der Radius ist, je nachdem sie zwei Punkte oder einen Punkt oder keinen Punkt mit dem Kreise gemein hat.

Wenn eine Gerade und ein Kreis einen einzigen Punkt gemein haben, so sagt man, sie berühren sich; den gemeinsamen Punkt nennt man Berührungspunkt, die Gerade heifst Tangente des Kreises. Jede Gerade, die zwei Punkte mit einem Kreise gemein hat, heifst Sekante.

3. Die Geraden g und g' seien senkrecht zueinander, P sei ihr Schnittpunkt.

Die Gesamtheit der Punkte der Geraden g' ist identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, für welche der Abstand von der Geraden g durch dieselbe Strecke bestimmt wird wie der Abstand von dem Punkte P. Beschreibt man daher um einen Punkt Q von g' einen Kreis mit dem Radius QP, so ist g eine Tangente des Kreises; wird dagegen um einen Punkt R außerhalb g' ein Kreis mit dem Radius RP beschrieben, so ist g eine Sekante. Somit ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, ist das Lot zu der gegebenen Geraden in dem gegebenen Punkte.

4. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, die eine gegebene Gerade berühren, ist identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die von der gegebenen Geraden den Abstand r haben, also folgt:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius r, die eine gegebene Gerade berühren, besteht aus den beiden Parallelen zu der gegebenen Geraden im Abstande r.

5. Die Gesamtheit der Punkte auf der Achse eines Streifens ist identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die von den Rändern um die halbe Streifenbreite entfernt sind. Somit erhalten wir den Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Parallelen berühren, ist die Achse ihres Streifens. Der Durchmesser jedes Berührungskreises ist gleich der Streifenbreite.

6. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei sich schneidende Gerade berühren, ist identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die von den gegebenen Geraden gleiche Abstände haben. Es ergiebt sich daher:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Gerade berühren, besteht aus den beiden Halbierungslinien ihrer Winkel.

7. Sei g eine Gerade, die den Kreis M nicht schneidet (Fig. 64), g' die Parallele zu g durch M, AB der zu g senkrechte Durchmesser, $A'B'$ eine zu AB parallele Sehne, M'

der Schnittpunkt von $A'B'$ und g'. Der Durchmesser MM' ist sowohl für den Kreis M als auch für die Gerade $A'B'$ eine Achse, folglich auch für die Punkte A' und B'; mithin $A'M' = B'M'$. Da der Durchmesser die gröfste Sehne ist, so ist ferner $A'B' < AB$, folglich auch $\frac{A'B'}{2} < \frac{AB}{2}$ oder $A'M < AM$ und $B'M < BM$. Nun ist aber $P'M' = PM$, also: $P'M' - A'M' > PM - AM$ oder $A'P' > AP$. Andererseits aber auch: $P'M' + M'B' < PM + MB$ oder $B'P' < BP$.

Von den Endpunkten des zu g senkrechten Durchmessers hat demnach der eine unter allen Punkten der Kreislinie den kleinsten Abstand von g, der andere den gröfsten. Wir bezeichnen diese Abstände als den kleinen und den grofsen Abstand der Geraden und des Kreises. Für jede Gerade, die den Kreis nicht schneidet, ist die Differenz zwischen dem grofsen und dem kleinen Abstande gleich dem Durchmesser.

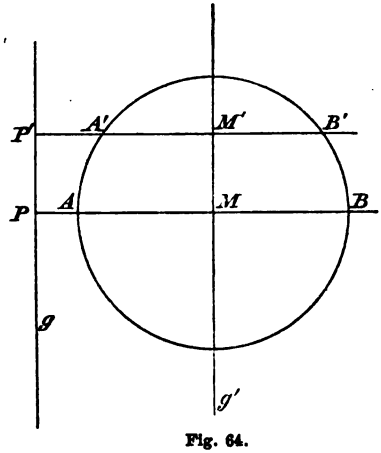


Fig. 64.

Wenn die Gerade g den Kreis schneidet, so ergiebt sich bei Anwendung der vorigen Bezeichnungen $A'P' < AP$ und $B'P' < BP$. Die Endpunkte des zu g senkrechten Durchmessers sind also auf jedem der durch g bestimmten Bogen diejenigen Kreispunkte, die von der Geraden g den gröfsten Abstand haben. Die Abstände dieser Kreispunkte von der Geraden g sollen wieder der grofse und der kleine Abstand der Geraden und des Kreises heifsen. Für jede Sekante des Kreises ist also die Summe ihres grofsen und ihres kleinen Kreisabstandes gleich dem Durchmesser.

Wenn eine Gerade und ein Kreis sich nicht schneiden, so ist der Mittelpunktsabstand der Geraden um den Radius gröfser als der kleine Kreisabstand, aber um den

Radius kleiner als der grofse. Schneidet eine Gerade den Kreis, so ist ihr Mittelpunktsabstand um den kleinen Kreisabstand kleiner als der Radius und wieder um den Radius kleiner als der grofse Kreisabstand.

Bezeichnet man mit a den Abstand eines Kreises und einer Geraden, mit d den Mittelpunktsabstand der Geraden, mit r den Radius, so besteht zwischen diesen drei Strecken eine der drei folgenden Beziehungen: entweder $d=a+r$, oder $d=r-a$, oder $d=a-r$. Die zweite setzt voraus, dafs $r>a$, die dritte, dafs $r<a$ ist. Die Gesamtheit der Mittelpunkte derjenigen Kreise vom Radius r, die von einer gegebenen Geraden den Abstand a haben, ist somit identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die von der gegebenen Geraden den Abstand $a+r$, oder einen der beiden Abstände $r-a$ oder $a-r$ haben, je nachdem $r>a$ oder $a>r$ ist. Somit ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise von gegebenem Radius r, die von einer gegebenen Geraden den gegebenen Abstand a haben, besteht aus den Parallelen zu der gegebenen Geraden im Abstande $a+r$ und in einem der Abstände $a-r$ oder $r-a$, je nachdem der gegebene Abstand gröfser oder kleiner als der gegebene Radius ist.

Wenn der gegebene Radius und der gegebene Abstand gleich sind, so fällt das zweite Paar von Parallelen mit der gegebenen Geraden zusammen.

8. Sei P ein Punkt auf einer der vier Geraden, welche die durch eine Quergerade bestimmten Streifenwinkel halbieren (Fig. 62).

Wenn man von P auf die Quergerade und auf die Streifenachse Lote fällt und mit jedem Lote als Radius den Kreis um P beschreibt, so wird durch den einen Kreis die Quergerade, durch den andern die Streifenachse berührt. Für den erstern Kreis ist der Kreisabstand der Achse, für den zweiten der Kreisabstand der Quergeraden gleich der halben Streifenbreite, und zwar handelt es sich um den grofsen oder um den kleinen Kreisabstand, je nachdem P auf den Seiten des Rechtecks liegt, welches durch die Halbierungslinien der Streifenwinkel bestimmt wird, oder auf den Verlängerungen der Seiten. Somit ergiebt sich:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine von zwei gegebenen Geraden berühren und von der andern einen gegebenen Abstand a haben, besteht aus vier Geraden, die ein Rechteck bestimmen. Die Ecken des Rechtecks liegen auf den gegebenen Geraden, und jede derselben hat von derjenigen gegebenen Geraden, auf der sie nicht liegt, den Abstand a.

Übungen zu § 26.

1. In einem gegebenen Punkte einer Kreislinie die Tangente zu ziehen. Warum giebt es nur eine einzige?

2. An einen gegebenen Kreis Tangenten zu ziehen, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind. Wieviel Lösungen?

3. An einen gegebenen Kreis Tangenten zu ziehen, 1) die eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneiden, 2) die auf einer gegebenen Geraden senkrecht stehen. Wieviel Lösungen in jedem Falle?

4. Von einem Kreise kennt man den Mittelpunkt und eine Tangente: den Radius und den Berührungspunkt zu finden.

5. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt. Wieviel Lösungen?

6. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Parallelen berührt, die eine in einem gegebenen Punkte. Wieviel Lösungen?

7. Einen Kreis zu zeichnen, der die Ränder eines gegebenen Streifens berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Wieviel Lösungen?

8. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt. Wieviel Lösungen?

9. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt. Wieviel Lösungen?

10. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade berührt (der durch einen gegebenen Punkt geht), und für dessen Mittelpunkt die Summe

oder die Differenz der Abstände von zwei andern gegebenen Geraden einer gegebenen Strecke gleich ist. Wieviel Lösungen höchstens?

11. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade berührt, die eine in einem gegebenen Punkte. Wieviel Lösungen?

12. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade berührt. Wieviel Lösungen? Ist die Aufgabe möglich, wenn die gegebenen Geraden parallel sind?

13. Einen Kreis zu zeichnen, der die Ränder eines gegebenen Streifens und eine gegebene Querstrecke berührt. Wieviel Lösungen?

14. Eine Gerade zu zeichnen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist und von einem gegebenen Kreise einen gegebenen Abstand hat. Wieviel Lösungen?

15. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat und durch einen gegebenen Punkt geht. Wieviel Lösungen höchstens?

16. Welches ist die Gesamtheit aller Geraden, die von einem gegebenen Kreise einen gegebenen Abstand haben?

17. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und von einer zweiten gegebenen Geraden den Abstand a hat. Wieviel Lösungen?

18. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade berührt und von einer zweiten gegebenen Geraden den Abstand a hat.

19. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, die von der einen von zwei gegebenen Geraden den Abstand a und von der andern den Abstand b haben? Welche Fälle sind für die Abstände zu unterscheiden?

20. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, die von zwei gegebenen Geraden denselben Abstand a haben?

21. Wenn ein Punkt mit den Endpunkten einer Strecke solche Abschnitte begrenzt, daſs der p^{te} Teil des einen gleich dem q^{ten} Teile des andern ist, so ist für jede Gerade, die durch den Punkt geht, auch der p^{te} Teil ihres Abstandes von dem einen Endpunkte der Strecke gleich

dem q^{ten} Teile ihres Abstandes von dem andern. (Mit Hilfe von kongruenten Streifen zu beweisen. Siehe § 22, Übung No. 18.

22. Eine Gerade so zu ziehen, daſs der 3. Teil ihres Abstandes von einem von zwei gegebenen Punkten gleich dem 5. Teile ihres Abstandes von dem andern ist, und die Gerade auſserdem entweder durch einen gegebenen Punkt geht oder mit einer gegebenen Geraden einen vorgeschriebenen Winkel bestimmt.

§ 27. Kreis und Kreis.

1. P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Kreises M, A und B die Endpunkte des Durchmessers PM, C ein beliebiger Punkt auf dem Kreise.

Liegt P auſserhalb des Kreises (Fig. 65), so ist die gebrochene Linie PCM gröſser als PM. Wird jede dieser Linien um den Radius vermindert, so ergiebt sich: $PC > PA$.

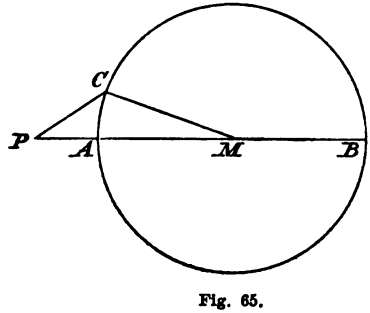


Fig. 65.

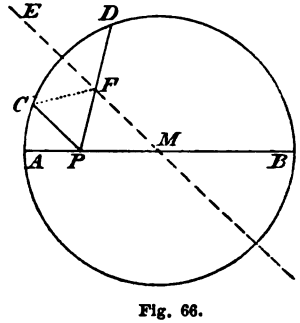


Fig. 66.

Wenn P innerhalb des Kreises liegt (Fig. 66), so ist die gebrochene Linie CPM gröſser als der Radius MC, also auch gröſser als MA. Subtrahiert man MP von jeder dieser Linien, so erhält man: $PC > PA$.

In beiden Fällen ist PC kleiner als die gebrochene Linie PMC, also auch: $PC < PM + MB$ oder: $PC < PB$.

Wenn man auf demselben Halbkreise wie C den Punkt D so annimmt, daſs $AD > AC$ ist (Fig. 66), so liegen bezüglich der Mittelsenkrechten ME von CD die Punkte P und C in der einen, D in der andern Halbebene; folglich

schneidet PD die Gerade ME. Ist F der Schnittpunkt, so ergiebt sich: $PD = PF + FD = PF + FC$, mithin: $PD > PC$.

Wenn ein Punkt den Kreis M durchläuft, so hat er von einem gegebenen Punkte P der Ebene den kleinsten Abstand in dem einen Endpunkte des Durchmessers PM, den gröfsten in dem andern. Sein Abstand von P wird in jeder der durch PM bestimmten Halbebenen ein einziges Mal gleich jeder vorgeschriebenen Strecke, die gröfser als sein kleinster und kleiner als sein gröfster Abstand von P angenommen wird.

Wird um den aufserhalb des Kreises M liegenden Punkt P ein Kreis beschrieben (Fig. 65), dessen Radius kleiner als PA oder gröfser als PB ist, so liegt auf einem solchen Kreise kein einziger Punkt der Kreislinie M. Ist der Radius des Kreises P gleich PA oder gleich PB, so ist im ersten Falle A, im zweiten B der einzige Punkt von M, der auch dem Kreise P angehört. Wird der Radius des Kreises P gröfser als PA, aber kleiner als PB gewählt, so giebt es auf M zwei Punkte, die beiden Kreisen gemeinschaftlich sind.

Bezeichnet man den Radius des Kreises M mit r, den des Kreises P mit ϱ und den Abstand der Mittelpunkte, die Centrale, mit c, so lassen sich die besprochenen Fälle folgendermafsen unterscheiden:

1. $\varrho < c - r$ oder $\varrho > c + r$, 2. $\varrho = c - r$ oder $\varrho = c + r$, 3. $\varrho > c - r$, aber $\varrho < c + r$ oder auch $c - r < \varrho < c + r$.

Diese Beziehungen können durch die folgenden ersetzt werden:

1. $\varrho + r < c$ oder $\varrho - r > c$, 2. $\varrho + r = c$ oder $\varrho - r = c$, 3. $\varrho - r < c < \varrho + r$.

Das Ergebnis der vorigen Betrachtungen kann in folgendem Satze ausgesprochen werden:

Zwei Kreise haben keinen Punkt gemein, wenn die Summe ihrer Radien kleiner, oder die Differenz ihrer Radien gröfser als die Centrale ist; sie haben einen einzigen Punkt gemein, wenn die Summe oder die Differenz ihrer Radien gleich der Centrale ist; sie haben zwei Punkte gemein, wenn die Summe der Radien gröfser, aber die Differenz kleiner ist als die Centrale.

Von zwei Kreisen, die einen einzigen Punkt gemein haben, sagt man, sie **berühren** sich; ihr gemeinschaftlicher Punkt heifst **Berührungspunkt**. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so nennt man die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte die **gemeinschaftliche Sehne** beider Kreise.

Aus der Ableitung des vorigen Satzes ergiebt sich, dafs von zwei sich nicht schneidenden oder zwei sich berührenden Kreisen der eine den andern **einschliefsen** oder jeder den andern **ausschliefsen** mufs. Der erste Fall tritt ein, wenn die Bedingung für die Summe der Radien, der zweite, wenn die Bedingung für die Differenz der Radien erfüllt ist.

2. Wenn zwei Kreise gegeben sind, so mufs für die Summe und die Differenz ihrer Radien eine der folgenden Annahmen Geltung haben: 1. $\varrho + r < c$ und gleichzeitig: $\varrho - r < c$, 2. $\varrho + r = c$ und gleichzeitig: $\varrho - r < c$, 3. $\varrho + r > c$ und gleichzeitig: $\varrho - r < c$, 4. $\varrho + r > c$ und gleichzeitig: $\varrho - r = c$, 5. $\varrho + r > c$ und gleichzeitig: $\varrho - r > c$. In den beiden ersten Fällen kann die Bedingung für $\varrho - r$, in den beiden letzten Fällen die Bedingung für $\varrho + r$ als selbstverständlich weggelassen werden, so dafs folgende Fälle zu unterscheiden sind: 1. $\varrho + r < c$, 2. $\varrho + r = c$, 3. $\varrho + r > c$ und gleichzeitig: $\varrho - r < c$, 4. $\varrho - r = c$, 5. $\varrho - r > c$.

Geht man von zwei sich nicht schneidenden Kreisen aus, so stehen von allen Annahmen, die man über die Summe, beziehungsweise die Differenz, ihrer Radien machen kann, nur zwei mit dem vorhin bewiesenen Satze im Einklang, dafs nämlich die Summe der Radien kleiner, oder die Differenz der Radien gröfser als die Centrale ist.

Geht man von zwei sich berührenden Kreisen aus, oder von Kreisen, die sich schneiden, so gelangt man durch Betrachtungen, die der vorigen ähnlich sind, zu dem vollständigen Beweise des Satzes:

Wenn zwei Kreise keinen Punkt gemein haben, so ist entweder die Summe ihrer Radien kleiner, oder die Differenz gröfser als die Centrale; berühren sie sich, so ist entweder die Summe oder die Differenz der Radien der Centrale gleich; haben sie zwei Punkte gemein, so ist die Summe der Radien gröfser, aber die Differenz kleiner als die Centrale.

Die Centrale bestimmt eine Gerade, die für jeden Kreis ein Durchmesser ist und selbst auch Centrale heifst. Sie ist die Achse der durch die Kreise gebildeten symmetrischen Figur. Der Berührungspunkt zweier Kreise ist daher ein Punkt der Centrale, die Schnittpunkte von zwei Kreisen liegen zur Centrale symmetrisch.

3. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis vom Radius r berühren, ist identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises den Abstand $r+\varrho$, oder einen der Abstände $r-\varrho$ oder $\varrho-r$ haben, je nachdem $r>\varrho$ oder $\varrho>r$ ist. Somit ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius, die einen gegebenen Kreis berühren, besteht aus zwei Kreisen, die mit dem gegebenen konzentrisch sind, und deren Radien gleich der Summe, beziehungsweise gleich der Differenz der gegebenen Radien sind.

4. Durch jeden Punkt P der Ebene geht ein Durchmesser des Kreises M. Die Abstände des Punktes P von den Endpunkten dieses Durchmessers heifsen der kleine und der grofse Abstand des Punktes P und des Kreises M.

Bezeichnet man den Radius des Kreises M mit r, den Mittelpunktsabstand des gegebenen Punktes P mit d und seinen Kreisabstand mit a, so besteht zwischen diesen drei Gröfsen eine der drei folgenden Beziehungen: entweder $d=a+r$, oder $d=r-a$, oder $d=a-r$, je nachdem der Punkt aufserhalb oder innerhalb des Kreises gedacht ist, und sein kleiner oder sein grofser Kreisabstand betrachtet wird. Die Gesamtheit aller Punkte, die von einem gegebenen Kreise den Abstand a haben, ist somit identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, die von dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises den Abstand $a+r$ oder einen der Abstände $a-r$ oder $r-a$ haben, je nachdem $a>r$ oder $r>a$ ist. Somit erhalten wir den Satz:

Der Ort für alle Punkte, die von einem gegebenen Kreise vom Radius r den Abstand a haben, besteht aus zwei Kreisen, die mit dem gegebenen konzentrisch sind. Ihre Radien unterscheiden sich um den gegebenen Abstand von dem

gegebenen Radius, oder um den gegebenen Radius von dem gegebenen Abstande, je nachdem $r > a$ oder $r < a$ ist.

Ist der gegebene Radius dem gegebenen Abstande gleich, so tritt an Stelle des einen Kreises der Mittelpunkt des gegebenen.

Übungen zu § 27.

1. Um einen gegebenen Punkt zwei konzentrische Kreise zu beschreiben, die einen gegebenen Kreis berühren. Welche Beziehung haben der gegebene Kreis und jeder der gesuchten zu der Geraden, die in dem Berührungspunkte auf der Centrale senkrecht steht?

2. Um jeden von zwei gegebenen Punkten je einen Kreis zu beschreiben, wenn die Summe der Radien beider Kreise gleich a, und die Differenz gleich b ist. In welcher Beziehung müssen die gegebenen Strecken a und b zum Abstande der gegebenen Punkte stehen, damit die gesuchten Kreise sich berühren?

3. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen in einem gegebenen Punkte berühren, ist der durch jenen Punkt bestimmte Durchmesser.

4. Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Wieviel Lösungen? Bei welcher Lage des gegebenen Punktes hat die Aufgabe keine Lösung?

5. Mit gegebenem Radius ϱ einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis vom Radius r berührt. Bei welchem Mittelpunktsabstande des gegebenen Punktes hat die Aufgabe keine Lösung?

6. Mit gegebenem Radius ϱ einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt. Wieviel solcher Kreise giebt es höchstens? Wieviel Kreise giebt es, wenn die gegebene Gerade ein Durchmesser des gegebenen Kreises, und der Radius des gesuchten Kreises gleich der Hälfte des Radius des gegebenen ist?

7. Wenn ein Kreis K einen gegebenen Kreis M und eine gegebene Gerade g berührt, von welcher Geraden hat

der Punkt K einen ebenso grofsen Abstand wie von dem Mittelpunkte des Kreises M? Beide Fälle der Berührung sind zu berücksichtigen.

8. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte und einen gegebenen Kreis berührt. (Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises hat gleiche Abstände von dem Mittelpunkte des gegebenen und einem Punkte auf der Senkrechten zu der gegebenen Geraden in dem gegebenen Punkte).

9. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise berührt. Wieviel Lösungen giebt es höchstens? Welches ist die Bedingung dafür, dafs es zwei Kreise giebt, die die gegebenen ausschliefsend berühren?

10. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene gleiche Kreise gleichartig berühren? Bei welcher Lage der gegebenen Kreise ist der gesuchte Ort ohne Hilfslinie konstruierbar?

11. Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene gleiche Kreise gleichartig berührt. Wieviel solcher Kreise giebt es?

12. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene konzentrische Kreise berühren? Wie grofs ist der Radius jedes Berührungskreises für jeden Fall der Berührung?

13. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene konzentrische Kreise berührt, den einen in einem gegebenen Punkte.

14. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene konzentrische Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Welcher Bedingung mufs der Mittelpunktsabstand des gegebenen Punktes genügen, damit die Aufgabe möglich sei?

15. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt, den einen in einem gegebenen Punkte. Wann hat die Aufgabe keine Lösung? (Ähnlich wie No. 8).

16. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt, den einen in einem gegebenen Punkte. Wann hat die Aufgabe keine Lösung?

17. Auf einer gegebenen Geraden Punkte zu finden, die von einem gegebenen Kreise den Abstand a haben. Wie grofs ist die Anzahl dieser Punkte, wenn die ge-

gebene Gerade den gegebenen Kreis berührt, und der gegebene Abstand kleiner als der Radius des gegebenen Kreises ist?

18. Punkte zu finden, die von jedem von zwei gegebenen Kreisen den Abstand a haben. Wieviel solcher Punkte giebt es höchstens?

19. In welchen Streifenecken sind je zwei Gegenecken Mittelpunkte von Kreisen, die sich auf einer Diagonale berühren?

20. In ein Quadrat vier gleiche Kreise so zu zeichnen, daſs jeder von ihnen zwei Seiten und zwei der drei übrigen Kreise berührt. (Die Mittelpunkte bestimmen ein Quadrat, dessen Seite gleich der Hälfte der Seite des gegebenen ist).

§ 28. Tangenten und gemeinschaftliche Tangenten.

1. Sei r der Radius des Kreises M, P ein beliebiger Punkt der Ebene.

Unter allen Geraden, die durch P gehen, giebt es eine einzige, deren Mittelpunktsabstand gleich PM ist, nämlich das in P auf PM errichtete Lot; für alle übrigen Geraden durch P ist der Mittelpunktsabstand kleiner als PM. Je nachdem P innerhalb des Kreises M oder auf dem Kreise liegt, geht also durch P keine oder eine einzige Gerade, deren Mittelpunktsabstand gleich dem Radius ist, also keine oder eine einzige Tangente des Kreises.

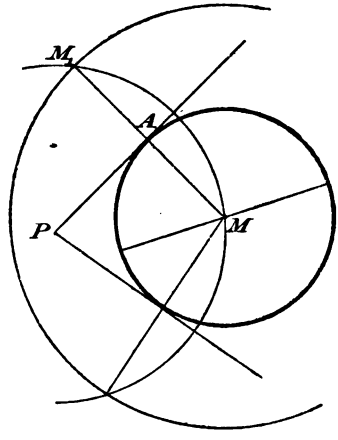


Fig. 67.

Liegt P auſserhalb des Kreises M, so ist $PM > r$. Es erscheint daher möglich, daſs durch P Gerade gehen, die vom Mittelpunkte den Abstand r haben, die also den Kreis berühren. Sei PA eine solche Gerade (Fig. 67), MA ihr Mittelpunktsabstand, also A ihr Berührungspunkt, M_1 der symmetrische Punkt zu M bezüglich PA. Sofort ergiebt sich, daſs $PM_1 = PM$, und MM_1 gleich dem Durch-

messer des gegebenen Kreises ist. Folglich sind zwei Orte für M_1 bestimmt: der Kreis um P mit dem Radius PM und der Kreis um M mit dem Durchmesser des gegebenen Kreises als Radius. PM, die Centrale dieser beiden Kreise, ist stets kleiner als die Summe der Radien, aber auch stets gröfser als ihre Differenz $2r - PM$, bezw. $PM - 2r$; folglich schneiden sich beide Kreise in zwei Punkten. Die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte mit dem Punkte M schneiden auf dem gegebenen Kreise die Berührungspunkte der durch P gehenden Tangenten aus. Es folgt also:

Je nachdem ein Punkt aufserhalb des Kreises, auf dem Kreise oder innerhalb des Kreises liegt, gehen durch ihn zwei Tangenten oder eine einzige oder keine.

2. Eine zweite Konstruktion der Tangenten, die durch P an den Kreis M gezogen werden können, ergiebt sich aus folgender Überlegung.

Ist A der Berührungspunkt der Tangente PA (Fig. 68),

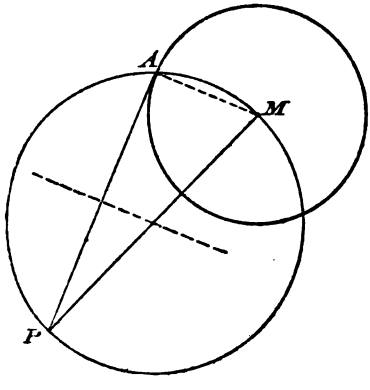


Fig. 68.

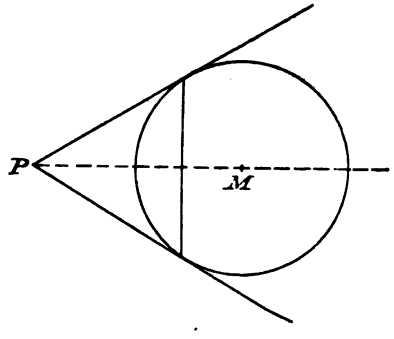


Fig. 69.

so steht MA auf PA senkrecht. Die Mittelsenkrechte von PA ist daher die Achse des Streifens, der durch MA und die Parallele zu MA durch P bestimmt wird; ihr Schnittpunkt mit PM hat also gleiche Abstände von A, P und M. Die Berührungspunkte der durch P gehenden Tangenten liegen daher auf einem Kreise, der den Mittelpunktsabstand des Punktes P zum Durchmesser hat.

3. Der Mittelpunkt M des Kreises hat von den beiden durch P gehenden Tangenten gleiche Abstände, folglich ist die Gerade PM sowohl für den Kreis als auch für den Winkel der beiden Tangenten eine Achse. Die beiden Berührungspunkte liegen daher symmetrisch bezüglich PM (Fig. 69). Wenn man nun die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Tangenten als die zu ihnen gehörige Berührungsehne bezeichnet, so kann der Satz ausgesprochen werden:

Der Durchmesser durch den Schnittpunkt zweier Tangenten desselben Kreises halbiert ihren Winkel und ist die Mittelsenkrechte ihre Berührungsehne.

Den Abstand eines Punktes der Ebene von dem Berührungspunkte einer durch ihn gehenden Tangente nennt man die Länge der zu dem Punkte gehörigen Tangente. So ergiebt sich weiter:

Tangenten, die von demselben Punkte aus an denselben Kreis gehen, sind gleich.

4. Es seien $P_1 A_1$ und $P_2 A_2$ zwei Tangenten an den Kreis M (Fig. 70).

Denkt man sich die Ebene doppelt gelegt, und die Figur durchgepaust, so kann durch Drehung der einen Ebene um M der Punkt A_2 mit A_1 zur Deckung gebracht werden. Dann decken sich auch die Geraden $A_2 P_2$ und $A_1 P_1$, da es in jedem Punkte der Kreislinie nur eine einzige Tangente giebt. Die in § 26, 1 angestellte Betrachtung lehrt nun: je nachdem $P_1 A_1 > P_2 A_2$ oder $P_1 A_1 = P_2 A_2$ oder $P_1 A_1 < P_2 A_2$ ist, ist auch $P_1 M > P_2 M$ oder $P_1 M = P_2 M$ oder $P_1 M < P_2 M$. Die Gesamtheit der Punkte, von denen aus an den Kreis M Tangenten gezogen werden können, die den durch P_1 gehenden Tangenten gleich sind, ist daher identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, deren Mittelpunktsabstände gleich dem des Punktes P_1 sind. Auf jeder beliebigen Tangente eines Kreises kann aber ein Punkt P_1 gefunden werden, von dem aus Tangenten

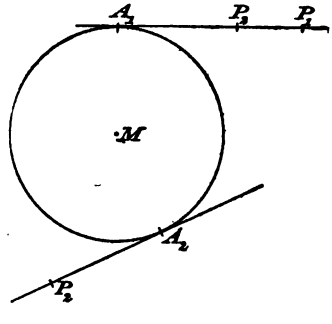


Fig. 70.

von vorgeschriebener Länge gezogen werden können. Somit erhalten wir den Satz:

Der Ort für alle Punkte, von denen aus Tangenten von gegebener Länge an einen gegebenen Kreis gelegt werden können, ist ein zu dem gegebenen konzentrischer Kreis. Sein Radius ist die Diagonale eines Rechtecks, dessen Seiten der gegebenen Tangentenlänge und dem Radius des gegebenen Kreises beziehungsweise gleich sind.

5. Wenn man zu der Tangente PA des Kreises M vom Radius ϱ die beiden Parallelen im Abstande r zieht, der kleiner als ϱ vorausgesetzt wird (Fig. 71), so berührt jede dieser Parallelen den Kreis um P mit dem Radius r. Die

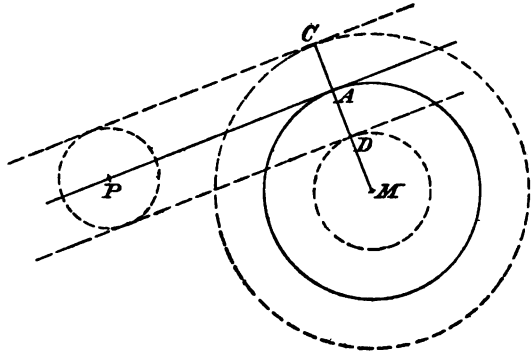


Fig. 71.

eine hat nun von dem Punkte M den Abstand $r_1 = \varrho + r$, die andere den Abstand $r_2 = \varrho - r$. Jene wird also auch durch den Kreis um M mit dem Radius r_1, diese durch den Kreis um M mit dem Radius r_2 berührt. Jede der beiden Parallelen erscheint somit als gemeinschaftliche Tangente von zwei Kreisen. Bezüglich der einen liegen beide Kreise in derselben Halbebene, bezüglich der andern in verschiedenen; die erstere heißt deswegen äußere, die zweite innere Tangente der beiden Kreise.

Die Figur kann auch hergestellt werden, wenn man von dem Kreise P mit dem Radius r und dem Kreise M mit dem Radius r_1, beziehungsweise dem Kreise M mit dem

Radius r_2, ausgeht. Man gelangt zu der Lösung der Aufgabe: von zwei Kreisen die gemeinschaftlichen Tangenten zu zeichnen.

Im erstern Falle beschreibe man um M, den Mittelpunkt des gröfsern Kreises, den Kreis mit dem Radius $\varrho = r_1 - r$. Ist nun $PM > r_1 - r$, d. h. giebt es auf jedem der gegebenen Kreise Punkte, die aufserhalb des andern liegen, so kann man durch P zwei Tangenten an den Kreis um M mit dem Radius ϱ ziehen. Wenn A der Berührungspunkt einer solchen Tangente, und C der Schnittpunkt der Geraden MA und des gegebenen Kreises M ist, so ist die Parallele durch C zu PA eine gemeinschaftliche äufsere Tangente der gegebenen Kreise. Der Berührungspunkt der zweiten Tangente durch P an den Kreis um M mit dem Radius ϱ ermöglicht die Konstruktion einer zweiten gemeinschaftlichen äufsern Tangente der Kreise P und M.

Ist $PM_1 = r_1 - r$, so berühren sich die gegebenen Kreise einschliefsend, und man sieht von vornherein, dafs das Lot zur Centrale im gemeinschaftlichen Berührungspunkte der Kreise ihre einzige gemeinschaftliche Tangente ist.

Im zweiten Falle beschreibe man um M den Kreis mit dem Radius $\varrho = r_2 + r$. Wenn nun $PM > r_2 + r$, d. h. wenn jeder Punkt jedes der gegebenen Kreise aufserhalb des andern liegt, so gehen durch P zwei Tangenten an den Kreis um M mit dem Radius ϱ. Ist A der Berührungspunkt der einen, und D der Schnittpunkt des gegebenen Kreises M und der Geraden MA, so ist die Parallele zu PA durch D eine gemeinschaftliche innere Tangente der gegebenen Kreise. Die zweite Tangente, die durch P an den Kreis M mit dem Radius ϱ gelegt werden kann, liefert eine zweite gemeinschaftliche innere Tangente.

Ist $PM = r_2 + r$, so berühren sich die gegebenen Kreise ausschliefsend, und es giebt nur eine einzige gemeinschaftliche innere Tangente, nämlich das Lot zur Centrale im Berührungspunkte der beiden Kreise. Es ergiebt sich also der Satz:

Zwei Kreise haben vier oder drei oder zwei oder eine oder keine gemeinschaftliche Tangente, je nachdem sie sich ausschliefsen, ohne sich zu berühren, oder sich ausschliefsend berühren oder

sich schneiden oder sich einschliessend berühren, oder der eine den andern einschliefst, ohne diesen zu berühren.

Übungen zu § 28.

1. Gegeben der Mittelpunkt eines nicht gezeichneten Kreises und eine Tangente. Mit Hilfe von zwei Kreisen den Durchmesser zu bestimmen.

2. Welches ist der Ort für alle Punkte, die zu dem Mittelpunkte eines gegebenen Kreises bezüglich je einer Tangente desselben symmetrisch liegen?

3. Welches ist der Ort für die Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem gegebenen Punkte P aus an alle konzentrischen Kreise um den gegebenen Punkt M gezogen werden können? (Siehe die zweite Tangentenkonstruktion.)

4. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die von einem zweiten gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

5. Durch einen gegebenen Punkt zwei Gerade zu ziehen, von denen die eine von einem zweiten gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand a, die andere einen doppelt so grofsen oder dreimal so grofsen Abstand hat. Unter welchen Bedingungen sind diese Aufgaben unmöglich, und wieviel Lösungen hat jede im allgemeinen?

6. Unter allen Tangenten, die von den Punkten einer Geraden aus an einen gegebenen Kreis gelegt werden können, ist diejenige die kleinste, die von dem Fufspunkte des zu der Geraden senkrechten Durchmessers ausgeht. (Siehe Nr. 4 des vorstehenden Paragraphen.)

7. Gegeben ein Kreis M und ein Paar paralleler Tangenten. Jede dritte Tangente schneidet die gegebenen so, dafs die Durchmesser nach den Schnittpunkten aufeinander senkrecht stehen.

8. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten einen gegebenen Kreis berühren, und von dem eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht. Warum giebt es zwei solche Quadrate?

9. Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, von dem aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente von der Länge a gezogen werden kann. Wann hat die Aufgabe keine Lösung?

10. Um einen gegebenen Punkt M einen Kreis zu beschreiben, an den von einem gegebenen Punkte P aus Tangenten von der Länge a gelegt werden können.

11. Gegeben zwei Punkte P und K. Um K einen Kreis so zu beschreiben, daſs der Winkel der von P aus gezogenen Tangenten einem gegebenen Winkel gleich ist.

12. Welches ist der Ort für alle Punkte, von denen aus an zwei gegebene gleiche Kreise gleiche Tangenten gezogen werden können?

13. Einen Punkt zu finden, von dem aus an drei gegebene gleiche Kreise gleiche Tangenten gelegt werden können. Wieviel solcher Punkte giebt es, und wann ist die Aufgabe nicht möglich?

14. Eine Gerade zu zeichnen, die von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände und von einem dritten gegebenen Punkte den Abstand a hat.

15. Punkte zu finden, von denen aus an zwei gegebene Kreise Tangenten von der Länge a gelegt werden können. Wieviel solcher Punkte giebt es höchstens?

16. Eine Gerade zu zeichnen, die von einem von zwei gegebenen Punkten den Abstand a und von dem andern den Abstand b hat. Wieviel solcher Geraden giebt es höchstens?

17. Zwei gleichartige gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise schneiden sich auf der Centrale. (Welches ist die Achse der Figur?)

18. Die Abschnitte, die auf zwei gleichartigen gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise durch die Berührungspunkte bestimmt werden, sind gleich. (Wie bei No. 17).

19. Für jedes Paar gleichartiger gemeinschaftlicher Tangenten zweier Kreise sind die Berührungsehnen parallel.

20. Durch die vier Berührungspunkte von zwei gleichartigen gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise kann ein Kreis gelegt werden. (Die vier Berührungspunkte sind die Ecken eines Trapezes.)

21. Ist der Radius des einen von zwei gegebenen Kreisen doppelt so groſs wie der Radius des andern, so werden die Abschnitte der gemeinschaftlichen äuſsern Tangenten, die durch die Centrale und den Berührungs-

punkt des gröfsern Kreises begrenzt werden, durch den Berührungspunkt des kleinern halbiert. Wie lautet der entsprechende Satz für die innern Tangenten?

§ 29. Sehnen und Sehnenwinkel.

1. Jeder Durchmesser eines Kreises ist eine Achse für den Kreis und für die Gesamtheit der zu ihm senkrechten Sekanten, folglich auch für die Gesamtheit der zu ihm senkrechten Sehnen, für die Gesamtheit der Bogen, die durch die Endpunkte jeder solcher Sehne bestimmt werden, für die Gesamtheit der Sektoren, die zu diesen Bogen gehören, und für die Gesamtheit der Winkel, die den in Frage stehenden Bogen und Sektoren entsprechen. Berücksichtigt man, dass jede Linie einen einzigen Mittelpunkt, und jeder Sektor, sowie jeder Winkel, eine einzige Halbierungslinie besitzt, so ergeben sich die Sätze:

Der Ort für die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kreises ist der zu ihnen senkrechte Durchmesser.

Der zu einer Sehne senkrechte Durchmesser, der Durchmesser durch den Mittelpunkt der Sehne, die Radien nach den Mittelpunkten der Bogen, die durch die Endpunkte der Sehne bestimmt werden, die Halbierungslinien der zu diesen Bogen gehörigen Sektoren und die Halbierungslinien der ihnen entsprechenden Winkel bilden eine einzige Gerade.

Jede Tangente ist parallel zu den Sehnen, die auf dem Durchmesser nach ihrem Berührungspunkte senkrecht stehen.

2. Sind AB und CD zwei parallele Sehnen eines Kreises (Fig. 72), so haben die Bogen AB und CD denselben Mittelpunkt, wenn sie bezüglich des zu ihnen parallelen Durchmessers in derselben Halbebene liegen; liegen sie bezüglich dieses Durchmessers in verschiedenen Halbebenen, so sind ihre Mittelpunkte die Endpunkte des zu ihnen senkrechten Durch-

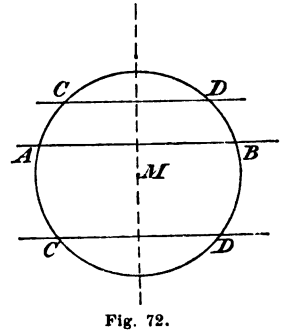


Fig. 72.

messers. In beiden Fällen sind also die Bogen AC und BD einander gleich. Somit folgt:

Bogen eines Kreises, die zwischen parallelen Sehnen liegen, sind gleich.

Je zwei parallele Sehnen eines Kreises sind die Grundlinien eines Trapezes, die Eigenschaften des Trapezes sind daher auf sie übertragbar.

3. Ein Kreis und zwei parallele Sekanten in gleichen Abständen vom Mittelpunkte bestimmen eine symmetrische Figur, deren Achse der zu den Sekanten parallele Durchmesser ist (Fig. 73). Die auf den Sekanten liegenden Sehnen

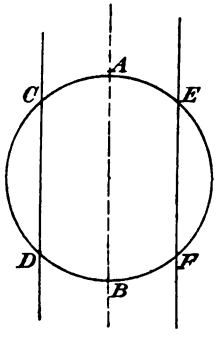


Fig. 73.

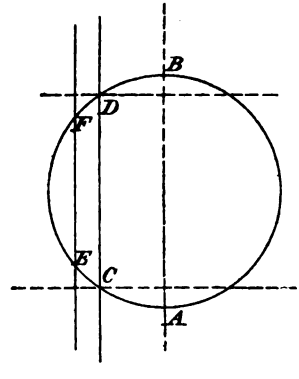


Fig. 74.

sind daher symmetrische Strecken, folglich gleich. Irgend zwei andere parallele Sekanten, deren Mittelpunktsabstände denen der vorigen gleich sind, bilden mit dem Kreise eine neue symmetrische Figur, die mit der erstern durch Drehung um den Mittelpunkt zur Deckung gebracht werden kann. Somit ergiebt sich der Satz:

Sehnen eines Kreises, die gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, sind gleich.

4. Es seien CD und EF zwei zu dem Durchmesser AB parallele Sehnen, die bezüglich AB in derselben Halbebene liegen (Fig. 74); CD sei die dem Mittelpunkte nähere Sehne.

Der Kreis und die in C und D auf CD errichteten Lote bilden eine symmetrische Figur, die AB zur Achse

hat. Die Schnittpunkte jedes Lotes mit dem Kreise liegen daher bezüglich AB symmetrisch, und jedes Lot hat in der Halbebene C mit dem Kreise einen einzigen Punkt gemein. Jedes der beiden Lote schneidet somit die Sekante EF in Punkten, die aufserhalb des Kreises liegen; diese Schnittpunkte begrenzen also eine Strecke, die grösser als EF ist. So ergiebt sich der Satz:

Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die gröfsere, die den kleinern Abstand vom Mittelpunkte hat.

5. Sind zwei ungleiche Sehnen eines Kreises gegeben, so steht mit den eben bewiesenen Sätzen nur die Annahme im Einklang, dafs die kleinere Sehne den gröfsern Mittelpunktsabstand hat. Daraus und aus einer ähnlichen Betrachtung über gleiche Sehnen folgt:

Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die kleinere den gröfsern Abstand vom Mittelpunkte, und gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Mittelpunktsabstände.

6. Sei AB eine Sehne des Kreises M von vorgeschriebener Länge a, CD eine beliebige zweite Sehne. Ist $CD = a$, so haben CD und AB gleiche Mittelpunktsabstände, und ist $CD \neq AB$, so haben beide Sehnen verschiedene Mittelpunktsabstände. Daher ergiebt sich der Satz:

Die Gesamtheit der Sehnen eines Kreises, die einer gegebenen Strecke gleich sind, ist identisch mit der Gesamtheit der Tangenten eines Kreises, der mit dem gegebenen konzentrisch ist.

7. Es seien M und K zwei kongruente Kreise, die auf der Geraden g die Sehnen AB und CD ausschneiden; MP und KQ die Mittelpunktsabstände der Geraden g (Fig. 75).

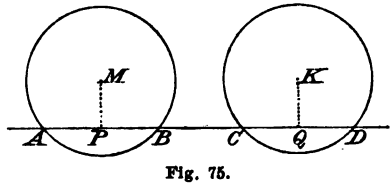


Fig. 75.

Da kongruente Kreise stets zur Deckung gebracht werden können, so sind die Sätze, die zwei Sehnen desselben Kreises und ihre Mittelpunktsabstände vergleichen, auf zwei Sehnen kongruenter Kreise und deren Mittelpunktsabstände übertragbar. Aus der Gleichung $AB = CD$ folgt also: $MP = KQ$,

und umgekehrt aus dieser jene. In derselben Beziehung stehen die Ungleichungen $AB \gtrless CD$ und $MP \gtrless KQ$ zueinander. Somit ergiebt sich: Je nachdem die Sehnen AB und CD gleich oder ungleich sind, ist die Centrale MK zu g parallel oder nicht parallel, und umgekehrt: je nachdem MK und g parallel sind oder nicht, sind die Sehnen AB und CD gleich oder ungleich.

Wird auf einer gegebenen Geraden die Strecke AB von vorgeschriebener Länge a abgetragen, so giebt es zwei Punkte der Ebene, die von A und B den gegebenen Abstand ϱ haben, folglich auch zwei Kreise vom Radius ϱ, die durch A und B gehen, wofern nur ϱ gröfser als $\frac{a}{2}$ gewählt wird. Die vorhergehende Betrachtung führt also zu dem Satze:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius, die eine gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneiden, besteht aus zwei Parallelen zu der gegebenen Geraden.

8. Wird ein Punkt einer Kreislinie mit den Endpunkten eines Durchmessers verbunden, so bestimmen die Verbindungslinien einen Winkel im Halbkreis.

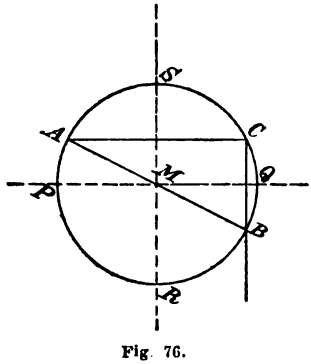


Fig. 76.

Ist $\sphericalangle ACB$ ein Winkel im Halbkreis (Fig. 76), und sind PQ und RS die zu den Schenkeln parallelen Durchmesser, so ergiebt sich: $\overset{\frown}{BR} + \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{CS} + \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{SQ} = \overset{\frown}{PR}$, mithin $\overset{\frown}{PR} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Dem Centriwinkel PMR, also auch dem Winkel ACB, entspricht somit ein Bogen, der dem vierten Teile des Kreises gleich ist; folglich ist der Winkel im Halbkreise ein Rechter. (Siehe § 19, Übung Nr. 17.)

Wird der Punkt C innerhalb des Kreises M mit den Endpunkten des Durchmessers AB verbunden (Fig. 77), und ist D der Schnittpunkt des Kreises mit dem Strahle AC, so ist

$\sphericalangle CDB + DCB < 2R$ (§ 21, 8) und $\sphericalangle CDB = R$, folglich: $\sphericalangle DCB < R$ und $\sphericalangle ACB > R$.

Wird der Punkt C' aufserhalb des Kreises angenommen, so ergiebt sich in ähnlicher Weise, dafs $\sphericalangle ACB < R$ ist.

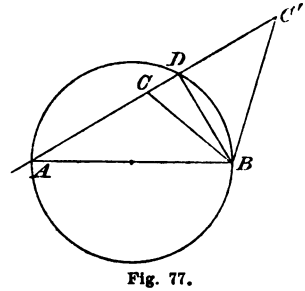


Fig. 77.

Die Gesamtheit der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die festen Punkte A und B gehen, ist somit identisch mit der Gesamtheit der Punkte der Kreislinie, die AB zum Durchmesser hat. In andern Worten:

Der Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist der Kreis, dessen Durchmesser der Abstand der festen Punkte ist.

9. Zwei Sehnen eines Kreises, die einen Endpunkt gemein haben, bestimmen einen Winkel, der Kreiswinkel heifst (Fig. 78, $\sphericalangle ACB$). Von dem Kreiswinkel sagt man, er stehe über dem in ihm liegenden Bogen. Über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ stehen unzählig viele Kreiswinkel; ihre Scheitel liegen auf dem Bogen, der $\overset{\frown}{AB}$ zu der Kreislinie ergänzt.

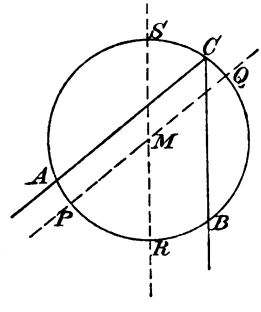


Fig. 78.

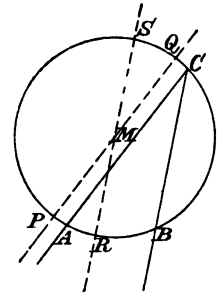


Fig. 79.

Ein Winkel, dessen Scheitel Mittelpunkt eines Kreises ist, heifst Centriwinkel dieses Kreises. Über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ steht ein einziger Centriwinkel, nämlich der ihm entsprechende.

Einen Centriwinkel und die Gesamtheit der Kreiswinkel, die über demselben Bogen stehen, nennt man zueinander gehörig.

10. ACB sei ein beliebiger Kreiswinkel, PQ und RS seien die zu den Schenkeln parallelen Durchmesser.

Je nachdem der Mittelpunkt des Kreises in der Winkelfläche liegt (Fig. 78) oder nicht (Fig. 79), ist entweder: $\overset{\frown}{BR} + \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{SC} + \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{SQ} = \overset{\frown}{PR}$, oder: $\overset{\frown}{BR} - \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{SC} - \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{SQ} = \overset{\frown}{PR}$. Wenn man auf jeder Seite der beiden Gleichungen $\overset{\frown}{BR} \pm \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PR}$ den Bogen $\overset{\frown}{PR}$ addiert, so gehen sie in dieselbe Gleichung $\overset{\frown}{AB} = 2\,\overset{\frown}{PR}$ oder $\overset{\frown}{PR} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ über.

Liegt M auf dem Schenkel CA (Fig. 80), so fällt PQ mit AC zusammen, und man sieht unmittelbar ein, dafs $\overset{\frown}{BR} = \overset{\frown}{SC} = \overset{\frown}{AR}$, mithin $\overset{\frown}{AR} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ ist.

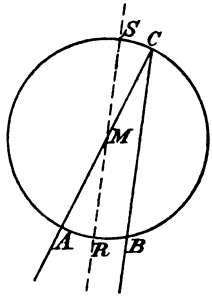


Fig. 80.

In allen Fällen ergiebt sich somit:

$$\sphericalangle PMR = \frac{1}{2} AMB,$$

oder

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} AMB.$$

In Worten:

Der Bogen, der einem Kreiswinkel entspricht, ist gleich der Hälfte des Bogens, über dem er steht.

Der Kreiswinkel ist gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

Kreiswinkel, die über demselben Bogen oder über gleichen Bogen desselben Kreises oder kongruenter Kreise stehen, sind gleich.

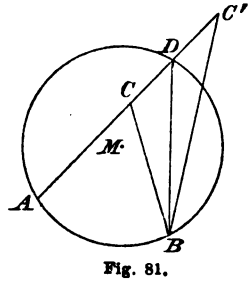


Fig. 81.

Da jeder Centriwinkel kleiner als vier Rechte ist, so ist jeder Kreiswinkel kleiner als zwei Rechte.

11. Wird der Punkt C innerhalb des Kreises mit den Punkten A und B der Kreislinie verbunden (Fig. 81), und ist D der Schnittpunkt des

Kreises mit dem Strahle AC, so ist (§ 21, 8): $\sphericalangle DCB + CDB < 2R$. Da aber $\sphericalangle DCB + ACB = 2R$ ist, so folgt: $\sphericalangle ACB > CDB$, oder $\sphericalangle ACB > ADB$.

Wird der Punkt C' aufserhalb des Kreises angenommen, so ergiebt sich wieder: $\sphericalangle DC'B + C'DB < 2R$. Aber es ist dann: $\sphericalangle ADB + C'DB = 2R$, mithin $\sphericalangle ADB > DC'B$ oder $\sphericalangle ADB > AC'B$.

Sind A und B zwei gegebene Punkte, und ist α ein gegebener Winkel, so kann stets ein Winkel gezeichnet werden, der gleich α ist, und dessen Schenkel beziehungsweise durch A und B gehen. Wenn C der Scheitel eines solchen Winkels ist, so wird durch A, B und C ein Kreis bestimmt. Die Gesamtheit der Punkte desjenigen Bogens $\overset{\frown}{AB}$, der bezüglich der Geraden AB in der Halbebene C liegt, ist dann nach den vorigen Ergebnissen für diese Halbebene identisch mit der Gesamtheit der Scheitel aller Winkel, die gleich α sind, und deren Schenkel durch A und B gehen. Berücksichtigt man, dafs der Bogen, der zu $\overset{\frown}{AB}$ bezüglich AB symmetrisch liegt, dieselbe Eigenschaft besitzt, wie der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ selbst, so ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Scheitel aller Winkel, die einem gegebenen Winkel gleich sind, und deren Schenkel durch je einen von zwei gegebenen Punkten gehen, besteht aus zwei Kreisbogen, die durch die gegebenen Punkte begrenzt werden und bezüglich deren Verbindungslinie symmetrisch liegen.

Von allen Punkten des Ortes aus wird die Verbindungslinie der gegebenen Punkte, wie man zu sagen pflegt, unter dem gegebenen Winkel gesehen.

Auf Grund dieses Satzes kann bei Konstruktionsaufgaben ein gegebener Winkel verwertet werden, wenn seine Schenkel durch je einen festen Punkt gehen.

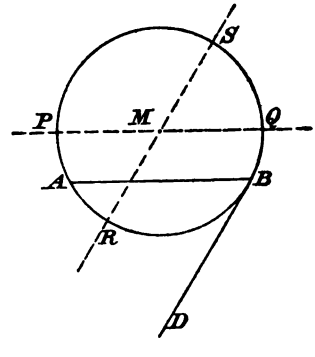


Fig. 82.

12. Wenn man in dem Endpunkte B der Sehne AB die Tangente BD zieht (Fig. 82), so

entsteht der Sehnentangentenwinkel ABD. Von ihm sagt man auch, dafs er über dem in ihm liegenden Bogen stehe.

Werden die frühern Bezeichnungen angewendet, so ergeben sich wieder der Reihe nach die Gleichungen: $\overset{\frown}{BR} - \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BS} - \overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QS} = \overset{\frown}{PR}$; $\overset{\frown}{AB} = 2\,\overset{\frown}{PR}$; $\overset{\frown}{PR} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}$; $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\,AMB$. Somit folgt:

Der Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Kreiswinkel über demselben Bogen.

Aus diesem Satze ergiebt sich eine bequeme Konstruktion des in Nr. 11 abgeleiteten Ortes, wenn man sich auf den Kreisbogen in der einen Halbebene beschränkt.

Man trage in B an die gegebene Strecke BA den gegebenen Winkel α an und beschreibe um A und B Kreise mit dem Radius AB (Fig. 83). Sei D der Schnittpunkt des Kreises A mit dem freien Schenkel des angetragenen Winkels. Man ziehe den Durchmesser DA, verbinde seinen zweiten Endpunkt mit B und bringe diese Verbindungslinie zum Durchschnitt mit der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise A und B. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises, dem der gesuchte Bogen angehört.

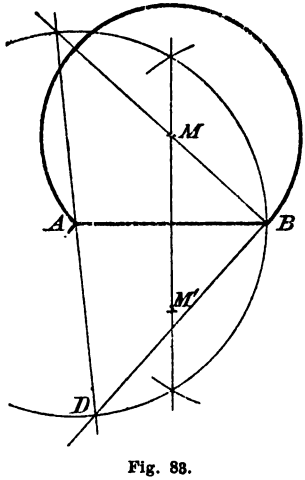


Fig. 83.

Durch die Punkte A und B zerfällt die Kreislinie in zwei Bogen. Wird über jedem dieser Bogen ein Kreiswinkel gezeichnet, so ergänzen sich die zugehörigen Centriwinkel zu vier Rechten; jene Kreiswinkel sind also Supplementwinkel.

13. Es seien AC und BD zwei Sekanten des Kreises M, die sich innerhalb oder aufserhalb des Kreises in S schneiden, CE sei die Parallele zu BD durch C.

Je nachdem S innerhalb (Fig. 84) oder aufserhalb (Fig. 85) des Kreises liegt, entspricht dem Winkel ACE, also auch dem ihm gleichen Winkel ASB ein Bogen, der gleich $\frac{AB + BE}{2}$ oder gleich $\frac{AB - BE}{2}$ ist. Da aber $BE = CD$ ist, so folgt der Satz:

Der Bogen, welcher einem Sekantenwinkel entspricht, ist gleich der halben Summe der in dem Winkel und in seinem Scheitelwinkel liegenden Bogen, wenn die Sekanten sich innerhalb des Kreises schneiden, aber gleich der halben Differenz der in dem Winkel liegenden Bogen, wenn die Sekanten sich aufserhalb des Kreises schneiden.

14. Für den Winkel zweier Tangenten ergiebt sich, wenn man durch den Berührungspunkt der einen die Parallele zu der andern zieht:

Dem Winkel zweier Tangenten entspricht ein Bogen, der gleich der halben Differenz der durch die Berührungspunkte bestimmten Bogen ist.

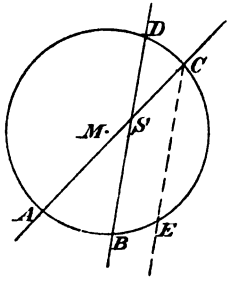


Fig. 84.

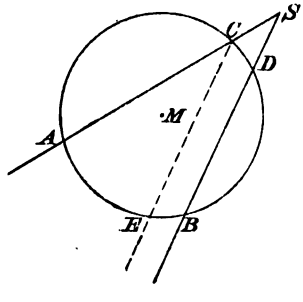


Fig. 85.

15. Es seien P und P' zwei Punkte aufserhalb des Kreises M, aber in gleichen Abständen von dem Mittelpunkte; PA und PB, $P'A'$ und $P'B'$ die Tangenten durch P und P'.

Denkt man sich die Ebene doppelt gelegt und die Figur durchgepaust, so kann man sich die eine Ebene so um M gedreht denken, dafs P' mit P zur Deckung kommt. Da durch P nur zwei Tangenten an den Kreis gehen, so

werden durch die Drehung die Tangenten $P'A'$ und $P'B'$ beziehungsweise mit PA und PB zur Deckung gebracht; die Tangentenwinkel in P und in P' sind also gleich.

Durch die Drehung kommen auch die Berührungspunkte A' und B' beziehungsweise mit den Berührungspunkten A und B zur Deckung, also sind auch die Berührungsehnen $A'B'$ und AB gleich. Somit ergiebt sich der Satz:

Zu Punkten in gleichen Mittelpunktsabständen aufserhalb eines Kreises gehören gleiche Tangentenwinkel und gleiche Berührungsehnen.

16. Es seien P und P' zwei Punkte in ungleichen Abständen vom Mittelpunkte des Kreises M, aber auf demselben Durchmesser (Fig. 86); A und B, A' und B' die Berührungspunkte der durch P und P' gelegten Tangenten;

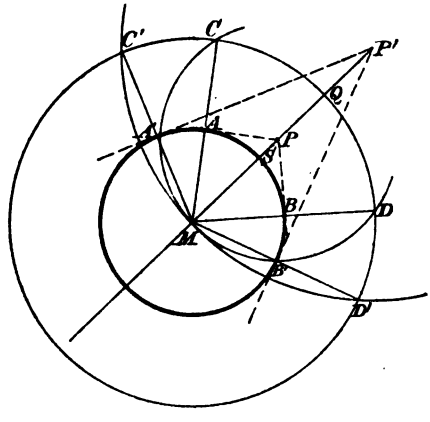


Fig. 86.

C, D, C', D' die Punkte, die zu M bezüglich der Tangenten PA, PB, $P'A'$, $P'B'$ beziehungsweise symmetrisch liegen.

Der Kreis um P mit dem Radius PM geht durch C und D, der Kreis um P' mit dem Radius $P'M$ durch C' und D', und beide Kreise berühren sich in M. Wenn $PM < P'M$ ist, so wird der Kreis P von dem Kreise P' eingeschlossen; folglich $PC' > PC$.

Die Punkte C, D, C' und D' liegen auf einem zu M konzentrischen Kreise. Schneidet dieser den Strahl MP in

Q, so ergiebt sich aus der vorigen Ungleichung: $\overset{\frown}{QC'} > \overset{\frown}{QC}$ (§ 27, 1). Für die entsprechenden Bogen auf dem gegebenen Kreise gilt daher dieselbe Beziehung, also: $\overset{\frown}{SA'} > \overset{\frown}{SA}$, mithin auch: $\overset{\frown}{A'B'} > \overset{\frown}{AB}$.

Den Tangentenwinkeln in P und P' entsprechen beziehungsweise die halbe Differenz der durch A und B und die halbe Differenz der durch A' und B' bestimmten Bogen. Da die erste Differenz den gröfsern Minuenden und den kleinern Subtrahenden hat, so ist sie die gröfsere; folglich ist auch der Tangentenwinkel in demjenigen Punkte der gröfsere, der den kleinern Mittelpunktsabstand hat.

Zu dem gröfsern der beiden Bogen AB und $A'B'$ gehört die gröfsere Sehne; folglich gehört die kleinere Berührungsehne zu denjenigen Tangenten, deren Schnittpunkt den kleinern Mittelpunktsabstand hat.

Nachdem an einen Kreis M eine Tangente gezogen ist, kann stets eine zweite Tangente gezeichnet werden, die mit der ersten einen gegebenen Winkel α einschliefst. Ist P der Schnittpunkt beider Tangenten, so ist die Gesamtheit der Punkte des um M mit dem Radius MP beschriebenen Kreises identisch mit der Gesamtheit der Punkte, für welche der Tangentenwinkel dem gegebenen Winkel α gleich ist. In andern Worten:

Der Ort für alle Punkte, deren Tangenten an einen gegebenen Kreis einen gegebenen Winkel einschliefsen, ist ein zu dem gegebenen Kreise konzentrischer Kreis.

Von allen Punkten des Ortes aus wird der gegebene Kreis, wie man zu sagen pflegt, unter dem gegebenen Winkel gesehen.

Wenn an einen Kreis eine beliebige Tangente gelegt ist, so kann eine zweite Tangente so gelegt werden, dafs die zu beiden gehörige Berührungsehne einer gegebenen Strecke gleich ist. Ist P der Schnittpunkt der Tangenten, so ist die Gesamtheit der Punkte des Kreises um M mit dem Radius PM identisch mit der Gesamtheit der Schnittpunkte aller Tangentenpaare, für die die zugehörige Berührungsehne der gegebenen Strecke gleich ist. Oder:

Der Ort für alle Punkte, für welche bezüglich eines gegebenen Kreises die Berührungsehnen

der zugehörigen Tangentenpaare einer gegebenen Strecke gleich sind, ist ein zu dem gegebenen Kreise konzentrischer Kreis.

17. Es seien PA und PB zwei Tangenten, die sich unter dem vorgeschriebenen Winkel α schneiden, AC und BD die durch die Berührungspunkte bestimmten Durchmesser (Fig. 87). Der Bogen, der dem Tangentenwinkel entspricht, ist gleich der halben Differenz der durch A und B bestimmten Bogen, also gleich $\widehat{AD}$; folglich ist $\sphericalangle AMD = \alpha$.

Die Figur kann hergestellt werden, wenn man von dem Kreise M und dem Centriwinkel $AMD = \alpha$ ausgeht (Fig. 88):

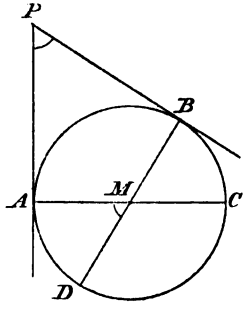


Fig. 87.

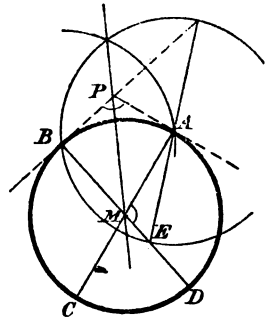


Fig. 88.

Man beschreibe um A und B die Kreise mit dem Radius AB, bringe erstern mit der Geraden BD zum Durchschnitt, ziehe durch diesen Schnittpunkt E einen Durchmesser des Kreises A, verbinde den zweiten Endpunkt dieses Durchmessers mit B und bestimme den Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Geraden, die durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und den einen Schnittpunkt der Kreise A und B geht. Der zuletzt erhaltene Schnittpunkt P bestimmt mit den Punkten A und B zwei Tangenten, die sich unter dem Winkel α schneiden.

Ist AB eine Sehne von gegebener Länge, so erhält man in der vorhin beschriebenen Weise zwei Tangenten, für welche die Berührungsehne einer gegebenen Strecke gleich ist.

18. Sei AB im Kreise M eine Sehne von vorgeschriebener Länge a.

Auf dem Durchmesser MC, der auf AB senkrecht steht (Fig. 89), giebt es zwei Punkte P und Q, die von A und B den gegebenen Abstand ϱ haben, wenn $\varrho > \frac{a}{2}$ ist, aber nur einen einzigen Punkt S, wenn $\varrho = \frac{a}{2}$ gewählt wird.

Sei $\varrho > \frac{a}{2}$, so können P und Q als Mittelpunkte von Kreisen vom Radius ϱ betrachtet werden, die den gegebenen Kreis unter einer Sehne schneiden, welche gleich a ist. Wählt man auf dem Strahle MC einen Punkt X, der von P und Q verschieden ist, so ist stets $AX \neq AP$ und $AX \neq AQ$. Wird daher um X der Kreis mit dem Radius ϱ beschrieben, so liegt A entweder innerhalb oder aufserhalb des Kreises X, aber nie auf demselben. Sind nun Y und Z die Schnittpunkte der Kreise M und X, so ergiebt sich (§ 27, 1): $\overset{\frown}{YC} \neq \overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{YZ} \neq \overset{\frown}{AB}$ und $YZ \neq AB$. Der Kreis X schneidet also den Kreis M unter einer Sehne, die von a verschieden ist.

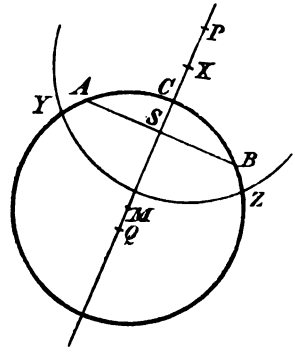


Fig. 89.

Wird in der Ebene ein Punkt V als Mittelpunkt eines Kreises vom Radius ϱ angenommen, so braucht man sich nur die Ebene doppelt gelegt zu denken, um zu erkennen, dafs der Punkt V durch Drehung um M mit einem Punkte des Strahles MC zur Deckung gebracht werden kann. Folglich schneidet der Kreis V den Kreis M unter einer Sehne, die gleich a, oder von a verschieden ist, je nachdem die Strecke MV einer der Strecken MP oder MQ, oder keiner von beiden gleich ist.

Wird $\varrho = \frac{a}{2}$ gewählt, so ergiebt sich: auf dem Strahle MC ist der Punkt S der einzige Mittelpunkt eines Kreises vom Radius ϱ, der den gegebenen Kreis unter einer Sehne schneidet, die gleich a ist. Jeder Punkt V der Ebene, der

der Bedingung $MV = MS$ genügt, besitzt dieselbe Eigenschaft wie S selbst. So ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise vom Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne a schneiden, besteht aus zwei Kreisen, die mit dem gegebenen konzentrisch sind, oder aus einem einzigen Kreise, je nachdem der gegebene Durchmesser gröfser als die gegebene Sehne oder dieser gleich ist.

Übungen zu § 29.

1. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises eine Sehne zu legen, die durch jenen Punkt halbiert wird.

2. In einen gegebenen Kreis eine Sehne so zu legen, dafs sie von einer gegebenen Sehne halbiert und unter einem gegebenen Winkel geschnitten wird. (Welchen Winkel bestimmt die gegebene Sehne mit dem Mittelpunktsabstande der gesuchten?)

3. Von einem Kreise sind drei Punkte gegeben. Mit Hilfe von zwei Kreisen einen vierten Punkt jenes Kreises zu finden. (Der gesuchte Punkt bestimmt mit den gegebenen ein Trapez.)

4. Den zu zwei gegebenen parallelen Sehnen senkrechten Durchmesser mit alleiniger Hilfe des Lineales zu zeichnen. (Siehe § 23, 17.)

5. Die Schnittpunkte aller Tangentenpaare, die einen gegebenen Kreis in den Endpunkten paralleler Sehnen berühren, liegen in einer Geraden.

6. Durch einen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises die gröfste und die kleinste Sehne zu ziehen.

7. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, dafs ein gegebener Kreis auf ihr eine Sehne von vorgeschriebener Länge ausschneidet.

8. Eine Gerade zu zeichnen, auf der von dem einen von zwei gegebenen Kreisen eine Sehne von der Länge a und von dem andern eine Sehne von der Länge b ausgeschnitten wird.

9. Mit gegebenem Radius ϱ einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade unter einer Sehne von vor-

geschriebener Länge a schneidet und entweder 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) eine zweite gegebene Gerade berührt oder 3) auf einer zweiten gegebenen Geraden eine Sehne von der Länge b ausschneidet.

10. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Gerade unter gleichen Sehnen schneiden? (Jeder Mittelpunkt hat von den gegebenen Geraden gleiche Abstände.)

11. Mit gegebenem Radius ϱ einen Kreis zu zeichnen, der jede von zwei gegebenen Geraden unter der Sehne a schneidet. Wieviel Lösungen?

12. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade unter gleichen Sehnen schneidet und entweder 1) durch zwei gegebene Punkte geht, die nicht in demselben Winkel der gegebenen Geraden liegen oder 2) einen gegebenen Kreis oder eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

13. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte aller Sehnen eines Kreises, die durch einen gegebenen Punkt gehen? (Jeder Mittelpunkt ist Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte gehen.)

14. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises eine Sehne zu ziehen, die durch eine gegebene Sekante halbiert wird. Unter welcher Bedingung hat die Aufgabe eine einzige Lösung? (Vergl. Nr. 13.)

15. Durch einen Schnittpunkt von zwei gegebenen Kreisen eine Gerade so zu ziehen, dafs die Summe (Differenz) der auf ihr liegenden Sehnen einer gegebenen Strecke gleich ist. Unter welcher Bedingung kann die Aufgabe nicht gelöst werden? (Die zu der Geraden senkrechten Durchmesser bestimmen einen Streifen, dessen Breite gleich der Hälfte der gegebenen Strecke ist, und von dem eine Querstrecke, die Centrale, gezeichnet vorliegt.)

16. Durch einen Schnittpunkt von zwei gegebenen Kreisen eine Gerade so zu legen, dafs entweder 1) beide Kreise auf ihr gleiche Sehnen ausschneiden, oder 2) der eine Kreis auf ihr eine 2-, 3-, 4-mal so grofse Sehne ausschneidet wie der andere, oder 3) der 3. Teil der einen Sehne gleich dem 4. Teile der andern ist. (Der Streifen der zu der Geraden senkrechten Durchmesser mufs in kongruente Streifen geteilt werden.)

17. Durch einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Gerade so zu legen, daſs ihr innerhalb der Kreise liegender Abschnitt möglichst groſs wird. (Siehe Nr. 15.)

18. Zwei Kreisbogen, die über gleichen Sehnen gleiche Kreiswinkel fassen, sind kongruent.

19. Die Halbierungslinien aller Kreiswinkel, die über demselben Bogen eines Kreises stehen, schneiden sich in einem und demselben Punkte (nämlich in dem Mittelpunkte des Bogens).

20. Einen Punkt zu finden, von dem aus zwei gegebene Strecken, die einen Endpunkt gemein haben, unter dem von den Strecken bestimmten spitzen Winkel gesehen werden.

21. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis so zu legen, daſs ein der Lage nach gegebener Winkel für den Kreis ein Sehnentangentenwinkel wird.

22. Gegeben ein Punkt und ein Winkel der Lage nach. Einen Kreis zu zeichnen, der den gegebenen Winkel so als Kreiswinkel faſst, daſs die Sehne, über der der Winkel steht, entweder 1) in dem gegebenen Punkte halbiert wird oder 2) durch den gegebenen Punkt so geteilt wird, daſs der 3. Teil des einen Abschnittes gleich dem 4. des andern ist. (Siehe § 22, Übung Nr. 20.)

23. Punkte zu finden, von denen aus der eine von zwei gegebenen Kreisen unter dem Winkel α, der andere unter dem Winkel β gesehen wird.

24. Gegeben zwei Kreise M und K. Man soll einen Punkt so bestimmen, daſs die Berührungsehne der zugehörigen Tangenten in dem einen Kreise gleich a, in dem andern gleich b wird.

25. Jedem von zwei gegebenen Kreisen ein Quadrat so umzuschreiben, daſs beide Quadrate eine gemeinschaftliche Ecke haben.

26. Zu gleichen Tangentenwinkeln gehören gleiche Berührungsehnen, und zu dem gröſsern zweier Tangentenwinkel gehört die kleinere Berührungsehne.

27. An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, die sich rechtwinkelig schneiden, und deren Berührungspunkte mit einem gegebenen Punkte in einer Geraden liegen.

28. An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, die sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, und deren Berührungsehne auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht.

29. An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, deren Berührungsehne gleich dem Radius ist und durch einen gegebenen Punkt geht.

30. Gegeben ein Kreis M und ein Punkt K. Um K einen Kreis so zu beschreiben, dafs für die gemeinschaftlichen äufsern Tangenten beider Kreise die Berührungsehne in dem gegebenen Kreise gleich dem halben Radius ist.

31. Gegeben zwei Kreise. Punkte zu finden, für welche die zugehörige Berührungsehne in jedem Kreise gleich dem Radius ist.

32. An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, deren Berührungsehne durch eine gegebene Sekante halbiert wird und einer gegebenen Strecke gleich ist.

33. Wenn der Radius des einen von zwei gegebenen Kreisen doppelt so grofs wie der Radius des andern ist, so ist für je zwei gleichartige gemeinschaftliche Tangenten die Berührungsehne in dem einen Kreise doppelt so grofs wie in dem andern. (Man ziehe zu der Centrale die Parallelen durch die Berührungspunkte.)

34. Gegeben ein Kreis M. Einen zweiten Kreis so zu zeichnen, dafs die Centrale beider durch einen gegebenen Punkt geht, die Berührungsehne eines Paares gemeinschaftlicher Tangenten im gesuchten Kreise halb so grofs ist wie im gegebenen, und der Winkel dieses Tangentenpaares einem gegebenen Winkel gleich ist.

35. Mit dem gegebenen Radius ϱ einen Kreis zu zeichnen, der den einen von zwei gegebenen Kreisen unter der Sehne a, den andern unter der Sehne b schneidet.

36. Mit dem gegebenen Radius ϱ einen Kreis zu zeichnen, der jeden von zwei gegebenen Kreisen unter dem Durchmesser schneidet.

37. Mit dem gegebenen Radius ϱ einen Kreis so zu zeichnen, dafs er einen gegebenen Kreis unter der Sehne a schneidet und die gemeinschaftliche Sehne entweder 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) zu einer gegebenen Geraden parallel ist oder 3) auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht.

38. Gegeben zwei sich schneidende Kreise M und K. Einen zu K konzentrischen Kreis zu zeichnen, der M unter einer doppelt so grofsen Sehne schneidet wie der Kreis K.

39. Gegeben zwei sich schneidende Kreise M und K. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der durch den gegebenen Punkt P geht und den Kreis M unter einer doppelt so grofsen Sehne schneidet wie der Kreis K.

40. Einen Kreis zu zeichnen, der die Ränder eines gegebenen Streifens oder zwei gegebene konzentrische Kreise berührt und eine gegebene Kreislinie halbiert. (Der Durchmesser des gesuchten Kreises ist bekannt.)

41. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus:

1) $e, \delta, \sphericalangle(ef)$ 2) e, δ, f 3) $e+f, e-f, \delta$ 4) $a, h_1, \sphericalangle(be)$
5) $a, h_1, \sphericalangle(ef)$ 6) $a, h_2, \sphericalangle(be)$ 7) $\mathfrak{F}, M_1, M_2, a$
8) $\mathfrak{F}, M_2, M_3, \beta$ 9) A, M_3, δ, f 10) $A, M_2, \beta, \sphericalangle(bf)$.

42. Ein Rechteck zu zeichnen aus:

1) M_1, M_2, a 2) D, M_1, f 3) $D, M_1, \sphericalangle(de)$
4) $\mathfrak{B}, \mathfrak{E}, M_2, \sphericalangle(ae)$ 5) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, S, r$.

43. Einen Rhombus zu zeichnen aus:

1) a, h 2) D, M_1, f 3) $\mathfrak{E}, a, \varrho, S$ 4) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, a$ 5) $B, \mathfrak{C}, \mathfrak{E}, f$.

44. Ein Quadrat zu zeichen aus:

1) $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, S$ 2) $\mathfrak{C}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, D$ 3) $\mathfrak{E}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}, f$ 4) $U, r, \mathfrak{E}$ 5) $S, \varrho, \mathfrak{E}$.

45. Ein Trapez zu zeichnen, wenn man kennt:

1) $a, h, \sphericalangle(be)$ 2) $a, c, \sphericalangle(be)$ 3) M_1, M_2, h, β
4) $a+c, M_1, M_4, \beta$ 5) $C, M_4, h, \sphericalangle(de)$ 6) r, a, c.

46. Ein Trapezoid zu konstruieren, von dem gegeben sind:

1) $a, h, f, \sphericalangle(be)$ 2) $a, b, e, \sphericalangle(ef)$ 3) $a-c, \sphericalangle(bd), h, e$
4) $a+c, \sphericalangle(ef), b, h$ 5) $m_1, m_2, a, \sphericalangle(m_1 m_2)$
6) $\sphericalangle(am_1), m_2, a, \sphericalangle(et)$.

§ 30. Winkel im Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden oder zweier Kreise.

1. Sei AB eine Sekante des Kreises M, AC die Tangente in A (Fig. 90).

Der Strahl AB kann durch Drehung um den Punkt A mit dem Strahle AC zur Deckung gebracht werden. Während

der Drehung nähert sich B dem Punkte A und fällt mit A zusammen, wenn die Sekante in die Tangente übergeht. So lange B von A unterschieden werden kann, unterscheiden wir auch die Sekante von der Tangente; liegt aber B dem Punkte A näher als jeder Punkt, den man von A unterscheiden kann, so ist es auch nicht mehr möglich, die Sekante AB von der Tangente AC zu unterscheiden. So gelangt man dazu, die Tangente eines Kreises als eine Sekante aufzufassen, deren Schnittpunkte unendlich nahe beieinander liegen.

Der vorigen Auffassung entsprechend mufs ein Punkt X der Kreislinie, der dem Punkte A unendlich nahe liegt, als ein Punkt der Tangente in A, und der unendlich kleine Bogen AX, sowie die unendlich kleine Sehne AX, als ein unendlich kleines Teilchen der Tangente AC betrachtet werden. Nimmt man den Punkt X des Kreises bald in der einen, bald in der andern Halbebene bezüglich des Durchmessers AM an, aber in beiden Fällen unendlich nahe bei A, so gelangt man zu der Vorstellung von zwei entgegengesetzten Richtungen, die auf dem Kreise von A ausgehen und durch die Strahlen angegeben werden, welche der Punkt A auf der zu ihm gehörigen Tangente bestimmt.

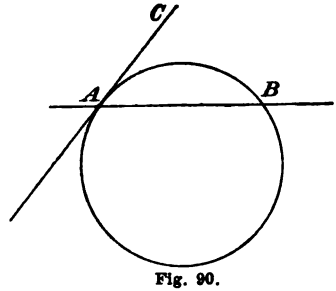


Fig. 90.

Jede Sekante AB bestimmt mit der Tangente in A zwei Paare von Scheitelwinkeln. Die vorige Betrachtung berechtigt uns dazu, diese Winkel als Winkel der Sekante und des Kreises aufzufassen. Wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich festgesetzt wird, soll unter dem Winkel eines Kreises und einer Sekante des Kreises stets der spitze Winkel verstanden werden, den die Sekante mit der Tangente in dem einen ihrer Kreispunkte begrenzt.

Da die Mittelsenkrechte der Sehne AB sowohl für die Sekante AB, als auch für den Kreis und das Tangentenpaar in A und B eine Achse ist, so sind die Winkel der Sekante und des Kreises in beiden Schnittpunkten einander gleich.

Jeder Durchmesser schneidet seinen Kreis rechtwinkelig und jede Tangente den ihrigen unter dem Winkel Null.

2. Wenn der Kreis M die Gerade g unter dem spitzen Winkel α schneidet, so steht MA auf einer Geraden durch A senkrecht, die g ebenfalls unter dem Winkel α schneidet. Der spitze Winkel, den der Strahl AM mit g bestimmt, ist daher gleich $R - \alpha$.

Der Winkel, der α zu einem Rechten ergänzt, heifst der Komplementwinkel von α.

Ist umgekehrt der von dem Strahle AP und der Geraden g bestimmte spitze Winkel gleich dem Komplementwinkel von α, so ist P Mittelpunkt eines Kreises, der durch A geht und g unter dem Winkel α schneidet.

Somit ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte unter einem gegebenen Winkel schneiden, besteht aus zwei Geraden, die durch den gegebenen Punkt gehen und die gegebene Gerade unter dem Komplementwinkel des gegebenen Winkels schneiden.

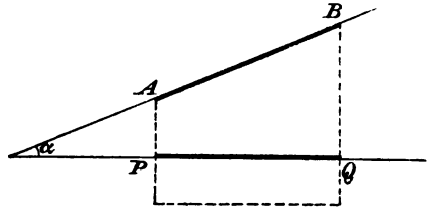


Fig. 91.

3. Wenn man von den Endpunkten der Strecke AB die Lote AP und BQ auf die Gerade g fällt (Fig. 91), so wird auf jeder Parallele zu g durch die Lote AP und BQ eine Strecke ausgeschnitten, die gleich PQ ist. Auf jeder Geraden, die nicht zu g parallel ist, bestimmen die Lote eine Strecke, welche als Querstrecke des von den Loten gebildeten Streifens gröfser als die Streifenbreite PQ ist. Somit ist die Länge der Strecke PQ durch den

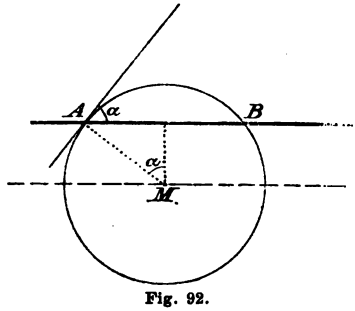


Fig. 92.

Winkel α, unter dem sich die Geraden AB und g schneiden, eindeutig bestimmt. Die Strecke PQ heifst die Projektion der Strecke AB für den Winkel α.

Sei nun M ein Kreis vom gegebenen Radius r, der die Gerade g in A und B unter dem Winkel α schneidet (Fig. 92).

Die Parallele zu g durch M bildet mit g einen Streifen, der durch die Querstrecke r und den Winkel $R - \alpha$, den sie mit dem Rande AB bildet, eindeutig bestimmt ist. Die Breite des Streifens ist gleich der Projektion des Radius r für den Winkel α. Die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, die g unter dem Winkel α schneiden, ist also identisch mit der Gesamtheit aller Punkte, deren Abstand von g gleich der Projektion des Radius r für den Winkel α ist. Somit erhalten wir den Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius, die eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneiden, besteht aus den Parallelen zu der gegebenen Geraden, deren Abstand von dieser gleich der Projektion des gegebenen Radius für den gegebenen Winkel ist.

4. Wenn eine Gerade g den Kreis M vom Radius r unter dem Winkel α schneidet, so ist ihr Mittelpunktsabstand gleich der Projektion des Radius für den Winkel α. Daher der Satz:

Die Gesamtheit der Geraden, die einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneiden, ist identisch mit der Gesamtheit der Tangenten eines konzentrischen Kreises, dessen Radius gleich der Projektion des Radius des gegebenen Kreises für den gegebenen Winkel ist.

5. Wenn die Kreise M und K sich in A und B schneiden, so ist MK die Achse der Figur (Fig. 93). Die Tangenten der Kreise im Punkte A liegen daher zu den Tangenten

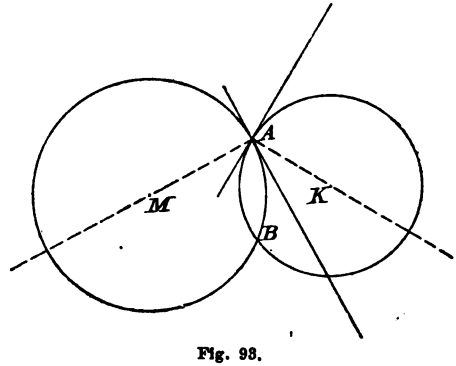


Fig. 93.

in B beziehungsweise symmetrisch, und die Winkel der Tangenten in A sind den Winkeln der Tangenten in B beziehungsweise gleich. Nach den frühern Betrachtungen sind wir berechtigt, die Winkel der Tangenten in einem Schnittpunkte beider Kreise als Winkel der Kreise selbst aufzufassen.

Die Durchmesser durch A stehen beziehungsweise auf den Tangenten in A senkrecht und bestimmen daher Winkel, welche den Winkeln der Tangenten beziehungsweise gleich sind. Die Winkel der Kreise sind somit den Winkeln der Durchmesser, die durch denselben Schnittpunkt der Kreise gehen, beziehungsweise gleich.

Der Begriff des Winkels zweier Kreise wird von jeder Zweideutigkeit befreit, wenn man ihn folgendermafsen definiert: Unter dem Winkel von zwei sich schneidenden Kreisen versteht man denjenigen Winkel der Tangenten in einem Schnittpunkte der Kreise, welcher dem Winkel der zu dem Schnittpunkte gehörigen Radien gleich ist.

Zwei Kreise, die sich ausschliefsend berühren, schneiden sich unter dem Winkel $2R$; wird von zwei sich berührenden Kreisen der eine von dem andern eingeschlossen, so ist ihr Winkel gleich Null.

6. Wird der Kreis M von dem Kreise K unter dem Winkel α geschnitten, so ist $\sphericalangle KAM = \alpha$ (Fig. 94). Ist umgekehrt $\sphericalangle PAM = \alpha$, so ist P Mittelpunkt eines Kreises, der durch A geht und den Kreis M unter dem Winkel α schneidet. Daher erhalten wir den Satz:

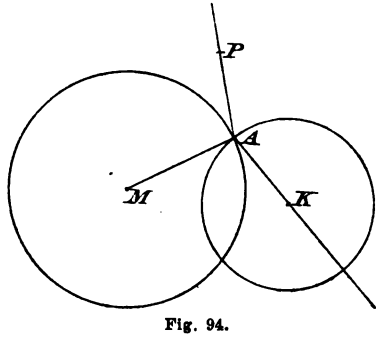


Fig. 94.

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte unter einem gegebenen Winkel schneiden, besteht aus zwei Strahlen, deren Scheitel der gegebene Punkt ist, und die mit dem Radius, der von diesem Punkte ausgeht, den gegebenen Winkel einschliefsen.

7. P und K seien zwei Kreise von gegebenem Radius ϱ, welche den Kreis M in A und B, beziehungsweise A' und B', schneiden (Fig. 95).

Ist $MK = MP$, so kann man durch Drehung um M die Punkte P und K, mithin auch die Kreise P und K zur Deckung bringen. Dann decken sich die Punkte A und B beziehungsweise mit den Punkten A' und B', folglich ist: $\sphericalangle KA'M = KB'M = PAM = PBM$, d. h. der Kreis M wird von den Kreisen P und K unter gleichen Winkeln geschnitten.

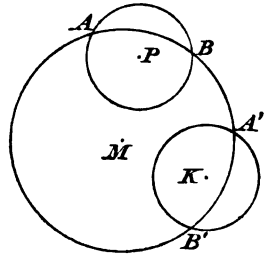


Fig. 95.

Ist umgekehrt $\sphericalangle KA'M = PAM$, so kann durch Drehung um M der Punkt A' mit einem der beiden Punkte A oder B so zur Deckung gebracht werden, daſs die gleichen Winkel bezüglich des gemeinschaftlichen Schenkels in derselben Halbebene liegen. Dann decken sich aber auch die beiden andern Schenkel, also auch die Punkte K und P. Diese haben daher gleiche Abstände von M. Somit ergiebt sich der Satz:

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneiden, ist ein zu dem gegebenen konzentrischer Kreis.

Übungen zu § 30.

1. Durch einen Punkt einer gegebenen Kreislinie eine Gerade zu ziehen, die den Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet. Wieviel Lösungen?

2. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte unter einem gegebenen Winkel schneidet und entweder 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) von einer zweiten gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat. Wieviel Lösungen hat jede Aufgabe?

3. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet und entweder 1) durch einen gegebenen Punkt

aufserhalb der Geraden geht oder 2) von einer zweiten gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand hat oder 3) eine zweite gegebene Gerade berührt oder 4) eine zweite gegebene Gerade unter der Sehne a schneidet.

4. Eine Gerade zu zeichnen, die einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet und entweder 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) zu einer gegebenen Geraden parallel ist oder 3) eine gegebene Gerade unter einem zweiten gegebenen Winkel schneidet oder 4) einen zweiten gegebenen Kreis berührt oder 5) einen zweiten gegebenen Kreis unter einem zweiten gegebenen Winkel schneidet.

5. Welches ist der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Gerade unter gleichen Winkeln schneiden?

6. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade unter gleichen Winkeln schneidet, wenn entweder 1) auf jeder Geraden ein Schnittpunkt gegeben ist, oder 2) von dem Kreise der Radius und eine Tangente gegeben sind, oder 3) diese Winkel einem gegebenen Winkel gleich sein sollen, und auf der einen Geraden ein Schnittpunkt gegeben ist.

7. Werden zwei Gerade von einem Kreise unter gleichen Winkeln geschnitten, so werden sie von demselben Kreise unter gleichen Sehnen geschnitten. (Siehe Nr. 5.)

8. Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte unter einem gegebenen Winkel schneidet und entweder 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) einen zweiten gegebenen Kreis berührt.

9. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis unter dem Winkel α schneidet und entweder 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) eine gegebene Gerade unter dem Winkel β schneidet oder 3) eine gegebene Gerade berührt oder 4) einen gegebenen Kreis berührt oder 5) einen zweiten gegebenen Kreis unter dem Winkel β schneidet oder 6) eine gegebene Gerade unter der Sehne a schneidet oder 7) einen zweiten gegebenen Kreis unter der gemeinschaftlichen Sehne a schneidet.

Elftes Kapitel.

Das Dreieck.

§ 31. Die Beziehungen zweier Seiten und ihrer Gegenwinkel.

1. Wenn man in der Ebene Gerade zieht, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen und keine zwei parallel sind, so ist die Anzahl der Schnittpunkte auf jeder Geraden um eins kleiner als die Anzahl der Geraden. Zählt man auf jeder Geraden jeden Schnittpunkt, so wird jeder zweimal gezählt, da jeder zwei Geraden angehört. Das Produkt aus der Anzahl der Schnittpunkte auf jeder Geraden und der Anzahl der Geraden ist also gleich der doppelten Anzahl aller Schnittpunkte. Die einfache Anzahl derselben ist somit gleich dem halben Produkte aus der Anzahl der Geraden und der um eins kleinern Zahl.

Nimmt man in der Ebene Punkte an, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, und verbindet man jeden Punkt mit jedem andern, so ist die Anzahl der Verbindungslinien, die von jedem Punkte ausgehen, um eins kleiner als die Anzahl der angenommenen Punkte. Zählt man in jedem Punkte die Anzahl der von ihm ausgehenden Verbindungslinien, so wird jede derselben zweimal gezählt. Das Produkt aus der Anzahl der Verbindungslinien, die von jedem Punkte ausgehen, und der Anzahl der Punkte ist also doppelt so grofs wie die Gesamtzahl der Verbindungslinien. Letztere ist daher gleich dem halben Produkte aus der Anzahl der Punkte und der um eins kleinern Zahl.

Sind drei Gerade gegeben, für die die obigen Voraussetzungen zutreffen, so ist die Anzahl ihrer Schnittpunkte gleich drei. Diese bestimmen auf den Geraden drei Strecken, welche die vollständige Grenze eines Stückes der Ebene bilden. Sind drei Punkte gegeben, die nicht in derselben Geraden liegen, so ist die Anzahl der Verbindungslinien gleich drei, und diese begrenzen wieder ein Stück der Ebene.

Eine von drei Strecken begrenzte ebene Fläche heifst Dreieck (Fig. 96); die Grenzstrecken nennt man Seiten, die gemeinschaftlichen Endpunkte von je zwei Seiten Ecken des Dreiecks.

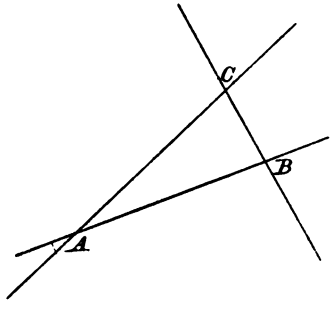


Fig. 96.

Das Dreieck liegt in drei Winkeln, die Innenwinkel oder einfach Winkel des Dreiecks heifsen; ihre Nebenwinkel nennt man Aufsenwinkel. Jeder Winkel oder Aufsenwinkel ist einer der vier Winkel im Schnittpunkte zweier Geraden, also stets kleiner als zwei Rechte. Als Winkel oder Aufsenwinkel eines Dreiecks können somit nur spitze, rechte oder stumpfe Winkel vorkommen. Da ferner je zwei Aufsenwinkel, die an derselben Ecke liegen, gleich sind, so rechnet man an jeder Ecke einen Aufsenwinkel.

Zu jeder Ecke gehört eine Gegenseite, nämlich die Verbindungslinie der beiden andern Ecken; zu jeder Seite eine Gegenecke, nämlich der gemeinschaftliche Endpunkt der beiden andern Seiten. Jede Seite hat zwei Anwinkel und einen Gegenwinkel, sie verbindet die Scheitel ihrer Anwinkel und ist die Gegenseite zu dem Scheitel ihres Gegenwinkels. Zu jedem Winkel gehören zwei Anseiten und eine Gegenseite, sein Scheitel ist der gemeinschaftliche Endpunkt seiner Anseiten und die Gegenecke seiner Gegenseite.

2. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich sind, so heifst es gleichschenkelig. Die gleichen Seiten nennt man Schenkel, die dritte Seite Grundlinie oder Basis, die Gegenecke der Grundlinie Spitze, die Anwinkel der Grundlinie Basiswinkel.

Sind AC und BC die Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks ABC, so ist C ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB (Fig. 97). Letztere ist also die Achse des Dreiecks. Somit ergiebt sich: $\sphericalangle CAB = CBA$. In Worten:

Die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks sind gleich.

Als Nebenwinkel von gleichen Winkeln sind auch die Aufsenwinkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks gleich.

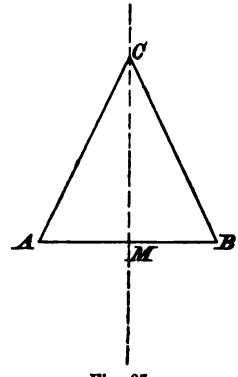


Fig. 97.

3. Ein Dreieck, in dem die drei Seiten gleich sind, heifst gleichseitig.

Das gleichseitige Dreieck kann auf drei Arten als ein gleichschenkeliges betrachtet werden, somit sind je zwei Winkel gleich. Es folgt also:

Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind gleich.

Als Nebenwinkel von gleichen Winkeln sind auch die Aufsenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks gleich.

4. Sind in einem Dreieck keine zwei Seiten gleich, so heifst es ungleichseitig.

In dem Dreieck ABC sei $AC > BC$ (Fig. 98).

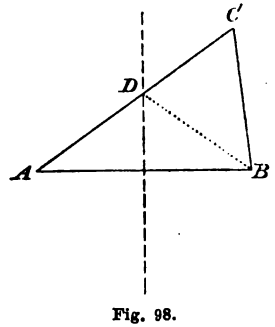


Fig. 98.

Die Mittelsenkrechte von AB trennt die Punkte der Ebene, die näher bei B liegen, von denen, die A näher liegen. Folglich liegt C in der Halbebene B, die Strecke AC schneidet also die Grenze der Halbebenen. Sei D der Schnittpunkt.

Das Dreieck ABD ist gleichschenkelig, folglich: $\sphericalangle DAB = DBA$. Da D zwischen A und C liegt, so ist: $\sphericalangle DBA < CBA$, folglich auch: $\sphericalangle DAB > CBA$. Nun liegt aber $\sphericalangle DAB$ in dem Dreieck ABC der Seite BC und $\sphericalangle CBA$ der Seite AC gegenüber, folglich ergiebt sich der Satz:

Die gröfsere von zwei Seiten eines Dreiecks hat den gröfsern Gegenwinkel.

Wendet man diesen Satz auf je zwei Seiten eines ungleichseitigen Dreiecks an, so erhält man den folgenden:

Die gröfste Seite eines Dreiecks hat den gröfsten Gegenwinkel.

5. Sind in dem Dreieck ABC die Winkel CAB und CBA gleich, so mufs für ihre Gegenseiten eine der drei folgenden Beziehungen gelten: entweder $CB < CA$ oder $CB = CA$ oder $CB > CA$. Wie die bisherigen Sätze lehren, steht die zweite Annahme allein mit der über die Winkel CAB und CBA gemachten Voraussetzung im Einklang; folglich ist sie die zutreffende. Somit ergiebt sich:

Gleiche Winkel eines Dreiecks haben gleiche Gegenseiten.

Macht man über die betrachteten Winkel eine andere Voraussetzung, so gelangt man durch eine Betrachtung, die der vorigen ähnlich ist, zu dem weitern Satze:

Der gröfsere von zwei Winkeln eines Dreiecks hat die gröfsere Gegenseite.

Hieraus folgt aber wieder:

Der gröfste Winkel eines Dreiecks hat die gröfste Gegenseite.

Wollte man die Dreiecke nach der Gleichheit oder der Ungleichheit ihrer Winkel in Klassen einteilen, so würde man zu denselben Klassen gelangen wie bei der Einteilung nach der Gleichheit oder der Ungleichheit der Seiten. Es ist daher überflüssig, für Dreiecke, die zwei oder drei gleiche Winkel haben, neue Namen einzuführen.

6. Wenn zwei Seiten verschiedenen Dreiecken angehören, so kann im allgemeinen die zwischen ihnen bestehende Beziehung nicht auf die Gegenwinkel übertragen werden, und umgekehrt auch nicht die Beziehung zweier Winkel verschiedener Dreiecke auf die Gegenseiten. Die Betrachtung in § 27, 1 lehrt aber, dafs in einem besondern Falle eine solche Übertragung zulässig ist.

Die Punkte P, M, C und D bestimmen zwei Dreiecke PMC und PMD (Fig. 99). Ist $\overset{\frown}{AC} < \overset{\frown}{AD}$ oder, was dasselbe ist, $\sphericalangle PMC < PMD$, so ist auch $PC < PD$. Ist aber $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ oder $\sphericalangle PMC = PMD$, so ist $PC = PD$.

Wird umgekehrt $\sphericalangle PMC < PMD$ vorausgesetzt, so steht von den drei Annahmen $PC < PD$, $PC = PD$ und $PC > PD$ nur die erste mit der Voraussetzung im Einklang; sie ist also die zutreffende. Ebenso ergiebt sich aus der Voraussetzung $\sphericalangle PMC = PMD$ die Folgerung: $PC = PD$.

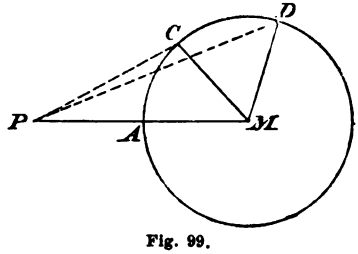


Fig. 99.

Es liegt also der Fall vor, daſs die Beziehung zwischen den Winkeln PMC und PMD auf ihre Gegenseiten PC und PD, und auch umgekehrt die Beziehung zwischen den Seiten PC und PD auf ihre Gegenwinkel PMC und PMD übertragen werden darf. Berücksichtigt man, daſs die betrachteten Dreiecke eine gemeinschaftliche Seite haben und in einer zweiten Seite übereinstimmen, ferner, daſs je zwei Dreiecke, die in zwei Seiten übereinstimmen, in dieselbe Lage gebracht werden können wie die Dreiecke PMC und PMD, so ergeben sich die Sätze:

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, so ist die Beziehung zwischen den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln auf deren Gegenseiten übertragbar.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, so ist die Beziehung zwischen den dritten Seiten auf deren Gegenwinkel übertragbar.

Übungen zu § 31.

1. Haben zwei gleichschenkelige Dreiecke die Grundlinie gemein, so halbiert die Verbindungslinie der Spitzen die Winkel an den Spitzen und die gemeinschaftliche Grundlinie und steht auf der letztern senkrecht.

2. Jedes Lot zu der Halbierungslinie eines Winkels bestimmt mit den Schenkeln ein gleichschenkeliges Dreieck.

3. Die durch die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks gezogene Parallele zur Grundlinie halbiert den Aufsen-

winkel an der Spitze und bestimmt mit den Halbierungslinien der Basiswinkel ein gleichschenkeliges Dreieck. (Die Mittelsenkrechte der Grundlinie des gegebenen Dreiecks ist die Achse der Figur.)

4. Die durch eine Ecke eines Dreiecks gezogene Parallele zu der Halbierungslinie eines Winkels (Aufsenwinkels) bestimmt mit den Anseiten des Winkels (Aufsenwinkels) ein gleichschenkeliges Dreieck.

5. Sind in dem Dreieck ABC die Punkte P und Q die Schnittpunkte des Kreises um C mit dem Radius CB und der Geraden AC, so sind PB und QB bezw. parallel zu den Halbierungslinien der Winkel in C.

6. Die Halbierungslinien der Aufsenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks bestimmen ein neues gleichseitiges Dreieck.

7. Jede Parallele zu einer Seite eines gleichschenkeligen (gleichseitigen) Dreiecks bestimmt mit den andern Seiten ein neues gleichschenkeliges (gleichseitiges) Dreieck.

8. Wenn zwei Punkte auf den Schenkeln oder auf den Verlängerungen der Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks mit den Endpunkten der Grundlinie beziehungsweise gleiche Strecken begrenzen, so ist ihre Verbindungslinie zu der Grundlinie parallel, oder wird ihre Verbindungslinie durch die Grundlinie halbiert, je nachdem jene Punkte bezüglich der Grundlinie in derselben Halbebene oder in verschiedenen Halbebenen liegen.

9. Die Achse eines gleichschenkeligen Dreiecks und ihre Parallelen durch die Mittelpunkte der Schenkel teilen die Grundlinie in vier gleiche Teile.

Vorbemerkungen. In jedem Dreieck sollen folgende Bezeichnungen gelten: 1) für die Ecken: A, B, C; 2) für die Seiten: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; 3) für die Winkel: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$; 4) für die Mittelpunkte der Seiten beziehungsweise: M_1, M_2, M_3; 5) für Punkte, die auf den Seiten als gegeben vorausgesetzt werden, beziehungsweise: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Im gleichschenkeligen Dreieck bezeichnet c die Grundlinie.

Bezüglich der Analyse wird auf das bei dem Streifeneck Gesagte verwiesen.

10. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1) a, b, c 2) a, b, γ 3) b, c, β
4) c, a, β 5) b, γ, β 6) $a+b, a-b, \gamma$
7) $c, a-c, \beta$ 8) $a+b, b, a$ 9) $A, M_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$
10) M_1, M_2, M_3 11) A, M_1, M_2 12) $C, a, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$
13) $c, a, C, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 14) $B, \beta, M_2, \mathfrak{A}$ 15) $B, a, M_2, \mathfrak{B}$
16) $A, \beta, M_1, \mathfrak{C}$ 17) $M_1, M_2, \gamma, \mathfrak{C}$ 18) M_1, M_2, a, γ
19) A, M_1, β, c 20) A, M_1, β, γ.

11. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn man kennt:

1) b, c 2) c, a 3) b, γ
4) b, a 5) a, a 6) $a, b+c$
7) $a-c, b$ 8) $M_1, M_2, \mathfrak{C}$ 9) $C, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$
10) $M_1, M_2, \mathfrak{B}$ 11) M_1, M_2, a 12) A, M_3, a
13) A, M_2, γ 14) B, M_2, c 15) B, M_2, b
16) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \gamma, M_3$.

12. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von dem man kennt:

1) a 2) M_1, M_2 3) A, M_1 4) $A, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 5) $M_2, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

§ 32. Die Seiten- und die Winkelsätze.

1. Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die gebrochene Linie, die von den beiden andern Seiten gebildet wird, also $c < a + b$.

Soll die Seite c mit der Differenz der beiden andern Seiten $a - b$ verglichen werden, so ist zu bemerken, daſs c sich von $c + b$ um dieselbe Gröſse unterscheidet, wie $a - b$ von a. Da aber $c + b > a$ ist, so folgt: $c > a - b$. So ergiebt sich der Satz:

Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden andern, aber gröſser als deren Differenz.

2. Zieht man durch die Ecke C des Dreiecks ABC den Strahl CF parallel zur Gegenseite AB (Fig. 100), so zerfällt der Aufsenwinkel an C in zwei Winkel, die nach den Sätzen über Streifenwinkel den Winkeln α und β beziehungsweise gleich sind. Daraus folgen die Sätze:

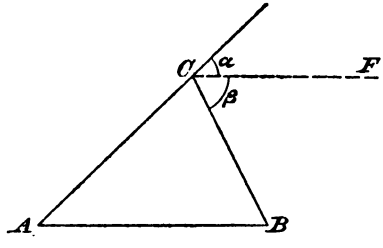


Fig. 100.

Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der Innenwinkel an den beiden andern Ecken, oder: Jeder Innenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Differenz zwischen dem Aufsenwinkel an einer zweiten Ecke und dem Innenwinkel an der dritten.

Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten.

3. Aus den vorstehenden Sätzen ergeben sich die folgenden:

Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks und der dritte Winkel sind Supplementwinkel.

Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gröfser als jeder Innenwinkel an einer andern Ecke.

Jeder Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks ist gleich der Hälfte des Aufsenwinkels an der Spitze.

Dreiecke, die in zwei Winkeln oder auch nur in der Summe von zwei Winkeln übereinstimmen, stimmen auch in dem dritten Winkel überein.

Gleichschenkelige Dreiecke, die in einem Basiswinkel oder in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen, sind winkelgleich.

Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks beträgt den dritten Teil von zwei Rechten.

Ist ein Winkel eines Dreiecks stumpf oder ein Rechter, so ist jeder der beiden andern spitz.

Auf Grund des letzten Satzes teilt man die Dreiecke in stumpfwinkelige, rechtwinkelige und spitzwinkelige ein. Die letzte Art umfafst die Dreiecke, in denen jeder

Winkel spitz ist. Die Gegenseite des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks heifst Hypotenuse, seine Anseiten nennt man Katheten. Man erkennt sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

Die Gegenseite eines stumpfen Winkels ist die gröfste Seite des Dreiecks.

Die Hypotenuse ist gröfser als jede Kathete desselben Dreiecks.

Die Summe der spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich einem Rechten.

Übungen zu § 32.

1. Die Summe der Verbindungslinien eines Punktes innerhalb eines Dreiecks mit den Endpunkten einer Seite ist kleiner als die Summe der beiden andern Seiten. (Siehe die Beweisführung in § 26, 1.)

2. Gegeben eine Gerade und zwei Punkte in derselben Halbebene bezüglich der Geraden. Für welchen Punkt der Geraden ist die Differenz der Verbindungslinien mit den gegebenen Punkten am gröfsten?

3. Für jeden Punkt, der auf der Parallele zur Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks durch die Spitze liegt, ist die halbe Summe der Abstände von den Endpunkten der Grundlinie gröfser als jeder Schenkel. (Man benutze zum Beweise den Punkt, der bezüglich jener Parallele zu einem Endpunkte der Grundlinie symmetrisch liegt.)

4. Unter allen Dreiecken, die eine Seite gemein haben, und deren dritte Ecken auf derselben Parallele zu der gemeinschaftlichen Seite liegen, hat das gleichschenkelige Dreieck den kleinsten Umfang. (Siehe Nr. 3.)

5. Wenn zwei Winkel α und β eines Dreiecks gegeben sind, so soll der dritte gezeichnet werden. Wie drückt sich dieser durch α und β aus?

6. Wenn γ der Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ist, einen Basiswinkel des Dreiecks (Aufsenwinkel an der Grundlinie) zu zeichnen. Wie drückt sich der gesuchte Winkel durch γ aus?

7. Wenn α ein Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks ist, so soll der Winkel an der Spitze gezeichnet und durch α ausgedrückt werden.

8. Warum kann ein Aufsenwinkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks nicht spitz sein?

9. Wenn α ein spitzer Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, den andern spitzen Winkel zu zeichnen und durch α auszudrücken.

10. Folgende Winkel zu zeichnen:

$$\frac{2R}{3},\ \frac{R}{3},\ \frac{R}{6},\ \frac{4}{3}R,\ \frac{5}{6}R,\ \frac{7}{6}R.$$

11. Jede Gerade, die in einem stumpfwinkeligen Dreieck einen spitzen Innenwinkel teilt, zerlegt das Urdreieck in zwei stumpfwinkelige Dreiecke.

12. Ist die Summe zweier Winkel eines Dreiecks dem dritten gleich, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

Mit Hilfe dieses Satzes soll der Satz über den Winkel im Halbkreise bewiesen werden.

13. Wird ein Dreieck durch die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte der Gegenseite in zwei gleichschenkelige geteilt, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

14. Jedes rechtwinkelige Dreieck wird durch die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Hypotenuse mit dem Scheitel des rechten Winkels in zwei gleichschenkelige Dreiecke zerlegt. (Die Mittelsenkrechte einer Kathete halbiert die Hypotenuse.)

15. Haben zwei gleichschenkelige Dreiecke den Winkel an der Spitze gemein, oder sind die Winkel an den Spitzen von zwei gleichschenkeligen Dreiecken Scheitelwinkel, so sind die Grundlinien parallel.

16. Sind in zwei gleichschenkeligen Dreiecken die Winkel an den Spitzen Supplementwinkel, so ist jeder Basiswinkel des einen der Komplementwinkel von jedem Basiswinkel des andern.

17. Welche Verlängerung einer Dreieckseite wird durch die Halbierungslinie des Aufsenwinkels an der Gegenecke geschnitten?

18. Welchen Bedingungen unterliegen die gegebenen Winkel bei folgenden Dreiecksaufgaben: 1) α, b, γ; 2) $\alpha = b$, c, α; 3) $\gamma = R$, b, β?

19. Wenn drei Durchmesser eines Kreises diesen in sechs gleiche Sektoren teilen, wie grofs sind die Sehnen, die zu diesen Sektoren gehören?

20. Die Beziehung zwischen einem Kreiswinkel und dem zugehörigen Centriwinkel soll mit Hilfe von gleichschenkeligen Dreiecken bewiesen werden.

21. Wenn man von den Endpunkten einer Dreieckseite aus diese auf jeder der beiden andern Seiten und auf deren Verlängerungen abträgt und jeden der erhaltenen Endpunkte mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet, wie drücken sich die Winkel zwischen diesen Verbindungslinien durch den Gegenwinkel der abgetragenen Seite aus?

22. Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck der eine spitze Winkel doppelt so groſs wie der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groſs wie die kleinere Kathete. Die Projektion einer Strecke für einen Winkel (§ 30, 3), der gleich $\frac{2R}{3}$ ist, ist gleich der Hälfte der Strecke.

23. Auf einem Durchmesser eines gegebenen Kreises einen Punkt zu finden, dessen Mittelpunktsabstand doppelt so groſs ist wie die von dem Punkte aus an den Kreis gelegte Tangente.

24. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn unter c die Hypotenuse verstanden wird, und gegeben sind:

1) a, b	2) a, c	3) c, α
4) a, α	5) β, α	6) A, B, $\mathfrak{A}$
7) A, C, $\mathfrak{C}$	8) A, M_3, $\mathfrak{B}$	9) B, M_1, $\mathfrak{C}$
10) M_1, M_2, $\mathfrak{C}$	11) M_2, M_3, $\mathfrak{C}$	12) C, M_3, $\mathfrak{C}$
13) A, M_3, α	14) B, b, β, $\mathfrak{A}$	15) C, M_1, α
16) C, c, α, $\mathfrak{A}$	17) M_3, α, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$	18) A, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$
19) A, β, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$	20) $\mathfrak{C}$, M_3, c, α	21) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, M_1
22) M_3, C, α	23) M_3, C, α	24) A, M_1, α
	25) A, M_1, β.	

25. Ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn man kennt:

1) c	2) b	3) A, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$	4) A, M_3
5) B, M_1	6) C, M_3	7) B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$	8) M_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$
9) M_3, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$	10) A, M_1	11) B, a, $\mathfrak{C}$	12) M_3, c, $\mathfrak{C}$
13) M_3, a, $\mathfrak{C}$	14) M_1, b, $\mathfrak{A}$	15) M_1, c, $\mathfrak{A}$	16) M_1, M_2
	17) M_1, M_3	18) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, M_3.	

26. Wenn in dem Dreieck ABC, in dem $a > b$ ist, der Kreis um C mit dem Radius b die Seite BC in P, die Verlängerung von BC in Q, die Gerade AB in R schneidet, so ist: 1) $PB = a - b$; 2) $QB = a + b$; 3) $\sphericalangle PAB = \frac{\alpha - \beta}{2}$; 4) $\sphericalangle QAB = 90 + \frac{\alpha - \beta}{2}$; 5) $\sphericalangle BCR = \alpha - \beta$. Wie lauten die entsprechenden Ergebnisse, wenn um C der Kreis mit dem Radius a beschrieben wird?

27. Ein Dreieck zu konstruieren, von dem gegeben sind:

1) $a + b$, β, γ
2) $c - a$, a, β
3) $a + b$, c, γ
4) $b + c$, a, γ
5) $b - c$, a, α
6) $c - a$, b, α
7) $c - b$, a, γ
8) $a + b$, γ, $\alpha - \beta$
9) $b - a$, γ, $\beta - \alpha$
10) c, γ, $\beta - \alpha$
11) $a + b$, $\beta - \alpha$, c
12) $a - b$, c, $\alpha - \beta$
13) a, b, $\beta - \alpha$
14) A, M_3, $\mathfrak{B}$, $a + b$
15) B, C, $\mathfrak{C}$, $b + c$
16) $\mathfrak{C}$, M_2, M_3, $b - c$
17) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, M_1, $a + c$, γ
18) $\mathfrak{C}$, M_3, $b - c$, a, α
19) M_3, M_1, $c - a$, γ
20) M_2, M_3, $b - c$, α
21) B, M_3, a, $a + b$
22) A, M_3, $a - b$, $\alpha - \beta$
23) M_1, M_3, a, $b + c$
24) M_1, M_2, $a + b$, γ
25) $\mathfrak{C}$, C, B, $\beta - \alpha$
26) $\mathfrak{B}$, M_2, $a + b$, c, $\alpha - \beta$
27) $\mathfrak{A}$, M_1, $c - a$, b, $\gamma - \alpha$
28) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, γ, M_2, $a + b$.

28. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben sind:

1) $a + c$, α
2) $b + c$, γ
3) $a - c$, γ
4) $a - c$, β
5) $c - a$, α
6) $c - a$, γ
7) $a + c$, α, M_3, $\mathfrak{C}$
8) $a - c$, γ, M_3, $\mathfrak{C}$
9) $a + c$, β, M_2, $\mathfrak{B}$
10) $a - c$, γ, M_1, $\mathfrak{A}$
11) M_2, M_3, $a + c$
12) M_1, M_2, $c - a$.

29. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn man kennt:

1) $a + b$, α 2) $a - b$, β 3) $b - a$, β
4) $b + c$, α 5) $c - a$, α 6) A, α, $a + b$, $\mathfrak{B}$
7) B, $\mathfrak{A}$, $b - a$, c 8) M_2, $\mathfrak{B}$, $a + b$, α 9) M_1, $\mathfrak{A}$, $b - a$, β
10) M_3, $\mathfrak{C}$, a, $a - b$ 11) M_1, M_2, $a + b$ 12) M_2, M_3, $a + b$
13) M_1, M_2, $b - a$ 14) M_1, M_3, $a - b$ 15) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, M_2, $a + b$.

30. Ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, von dem man kennt:

1) $a + c$ 2) $c - a$ 3) $\mathfrak{C}$, M_3, $b + c$.

31. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn der Umfang durch $2s$ ausgedrückt wird, und gegeben sind:

1) $a + b$, β, e 2) $b - a$, β, $\sphericalangle(ae)$
3) $c - d$, β, f 4) $2s$, γ, $\sphericalangle(af)$
5) $2s$, β, f 6) $e - a$, b, $\sphericalangle(ce)$
7) $b + f$, γ, c 8) $a - b$, e, $\sphericalangle(de) - \sphericalangle(ae)$
9) $e + f$, a $\sphericalangle(ef)$ 10) $e - f$, c, $\sphericalangle(af) - \sphericalangle(ae)$
11) $a + b$, e, h_1 12) $a - b$, β, h_1.

32. Ein Rechteck zu zeichnen, von dem man kennt:

1) $b - a$, f 2) $2s$, e 3) $e - a$, $\sphericalangle(ae)$ 4) $a + e$, $\sphericalangle(ef)$
5) $2s$, $\sphericalangle(ef)$.

33. Einen Rhombus zu zeichnen, wenn man kennt:

1) $a + e$, α 2) $f - a$, β 3) $e + f$, γ 4) $e - f$, δ 5) $2s$, h.

34. Ein Quadrat zu zeichnen aus:

1) $a + e$ 2) $e - a$ 3) M_2, $\mathfrak{B}$, $a + e$ 4) $\mathfrak{E}$, S, $e - a$
5) $\mathfrak{A}$, M_1, $e - a$.

35. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn der Umfang mit $2s$ bezeichnet wird, und gegeben sind:

1) $2s$, $a + b - c$, γ 2) $a - b + c$, $a + b - c$, β
3) $b + c - a$, $b - c + a$, $\gamma - a$ 4) $a + c - b$, α, β
5) $b + a - c$, α, β 6) $2s$, α, β
7) $2s$, α, γ 8) M_1, M_2, $2s$, β
9) M_2, M_3, $2s$, α 10) M_1, M_3, $b + c - a$, α
11) M_1, M_2, $a - b + c$, γ 12) M_1, M_3, $2s$, $a + b - c$.

36. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, von dem man kennt:

1) $2s, a$ 2) $c+b-a, a$ 3) $a+b-c, \beta$ 4) $M_1, M_2, 2s$ 5) $M_2, M_3, b+c-a$.

§ 33. Die ausgezeichneten Linien des Dreiecks.

1. Zu jeder Seite gehört eine Mittelsenkrechte. Wie in § 20, 2 bewiesen wurde, schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkte U, dem Mittelpunkte des durch die drei Ecken bestimmten Kreises. Dieser Kreis heifst der Umkreis des Dreiecks.

Unter der Länge der Mittelsenkrechten versteht man den Abschnitt, der durch den Mittelpunkt der zugehörigen Seite und den Mittelpunkt des Umkreises begrenzt wird.

2. Die Halbierungslinien der Winkel α und β bestimmen mit der Seite AB zwei nicht entsprechende Winkel, deren Summe $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$ kleiner als ein Rechter ist; folglich schneiden sie sich (§ 21, 8). Der Schnittpunkt J hat sowohl von den Geraden AB und AC als auch von den Geraden BA und BC gleiche Abstände. Folglich ergiebt sich: 1) J hat auch von CA und CB gleiche Abstände und liegt daher auf der Halbierungslinie von γ, 2) J hat gleiche Abstände von den drei Seiten des Dreiecks und ist daher Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Seiten berührt. Dieser Kreis heifst der Inkreis des Dreiecks.

Die Halbierungslinien der Aufsenwinkel in B und in C bestimmen mit BC zwei nicht entsprechende Winkel, deren Summe $\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$ kleiner als $2R$ ist; folglich schneiden sie sich. Der Schnittpunkt K_1 hat sowohl von den Geraden AC und BC als auch von den Geraden BC und AB gleiche Abstände. Somit ergiebt sich: 1) K_1 hat auch von AC und AB gleiche Abstände und liegt deshalb auf der Halbierungslinie von α, 2) K_1 hat von den drei Seiten gleiche Abstände und ist daher Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Seiten berührt. Dieser Kreis heifst ein Ankreis des Dreiecks. Somit erhalten wir den Satz:

Die Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Je zwei Halbierungslinien von Aufsenwinkeln und die Halbierungslinie des Innenwinkels an der dritten Ecke schneiden sich in einem Punkte.

Die vier Punkte, in denen sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks zu dreien schneiden, sind die Mittelpunkte der vier Berührungskreise.

Als Länge einer Winkelhalbierenden bezeichnet man ihren Abschnitt zwischen der zugehörigen Ecke und deren Gegenseite.

3. Das von einer Ecke auf die Gegenseite gefällte Lot heifst Höhe des Dreiecks. Im rechtwinkeligen Dreieck fallen zwei Höhen mit den Katheten zusammen; bei dem stumpfwinkeligen liegen die Höhen, welche auf den Anseiten des stumpfen Winkels senkrecht stehen, aufserhalb des Dreiecks.

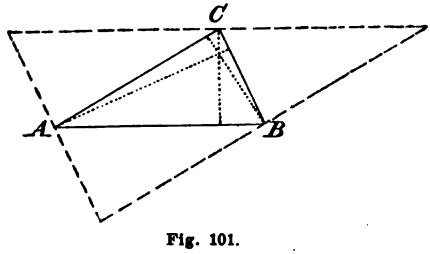


Fig. 101.

Zieht man durch jede Ecke eines Dreiecks die Parallele zu der Gegenseite (Fig. 101), so bestimmen je zwei Seiten des Dreiecks und die zugehörigen Parallelen ein Parallelogramm. Somit sind die Ecken des Urdreiecks die Mittelpunkte der Seiten des durch die Parallelen gebildeten Dreiecks, und die Höhen des Urdreiecks die Mittelsenkrechten der Seiten des neuen Dreiecks. Also folgt:

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Jede Höhe eines Dreiecks ist der Abstand einer Ecke von deren Gegenseite.

4. Die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte der Gegenseite heifst Mittellinie.

Wenn man durch die Ecken B und C des Dreiecks ABC die Parallelen zu den Gegenseiten zieht (Fig. 102), so bestimmen die Parallelen mit BC ein neues Dreieck BCD, welches mit dem Ur-

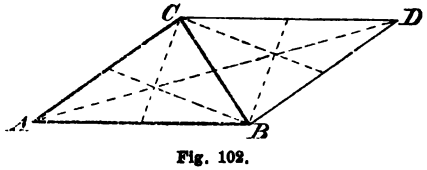


Fig. 102.

dreieck ein Parallelogramm bildet. Die Diagonale AD des Parallelogramms setzt sich aus zwei Mittellinien der beiden Dreiecke zusammen. Die von B und C ausgehenden Mittellinien verbinden im Parallelogramm $ABDC$ zwei Gegenecken mit den Mittelpunkten der Seiten und schneiden sich daher zu zweien auf der Diagonale AD, welche durch die Schnittpunkte in drei gleiche geteilt wird (§ 23, 6). Der mittlere Teil wird aber durch BC halbiert, somit wird die zu A gehörige Mittellinie des Dreiecks ABC durch den Schnittpunkt der andern so geteilt, daſs der von der Ecke A ausgehende Abschnitt doppelt so groſs ist wie der von der Seite BC begrenzte. Wenn man jenen Abschnitt als den obern, diesen als den untern bezeichnet und berücksichtigt, daſs der geführte Beweis auf die andern Mittellinien übertragbar ist, so erhält man den Satz:

Die Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte und teilen sich so, daſs der obere Abschnitt jeder Mittellinie doppelt so groſs wie der untere ist.

5. Die Mittelsenkrechten der Seiten, die Winkelhalbierenden, die Höhen und die Mittellinien heiſsen die ausgezeichneten Linien des Dreiecks; ihre Schnittpunkte mit den Seiten nennt man ihre Fuſspunkte.

Wenn in einem Dreieck die Mittelsenkrechte einer Seite mit einer der übrigen ausgezeichneten Linien, die zu derselben Seite gehören, zusammenfällt, so geht sie durch die Gegenecke der zu ihr gehörigen Seite; das Dreieck ist also gleichschenkelig.

Fällt in dem Dreieck ABC eine Höhe mit der zugehörigen Mittellinie zusammen, so ist die Höhe die Mittelsenkrechte der zu ihr gehörigen Seite, und das Dreieck ist gleichschenkelig.

Fällt die zu AB gehörige Höhe mit der Halbierungslinie des Winkels γ zusammen, so ist sie sowohl für AB als auch für den Winkel ACB eine Achse, folglich auch für die Punkte A und B; das Dreieck ist daher gleichschenkelig.

Wenn die Halbierungslinie des Winkels γ und die zugehörige Mittellinie CM in derselben Geraden liegen, so klappe man die durch die Winkelhalbierende bestimmten

Halbebenen zusammen. Dadurch kommen die Strahlen CA und CB zur Deckung. Von zwei Annahmen muſs nun die eine zutreffen: entweder werden auch die Punkte A und B zur Deckung gebracht, oder B und A decken sich nicht. Im letztern Falle würde ein gleichschenkeliges Dreieck ABM entstehen, in dem von den beiden Winkeln α und β der eine ein Basiswinkel, der andere ein Auſsenwinkel an der Grundlinie wäre. Somit würden die Winkel α und β Supplementwinkel sein, und, da sie gleich sind, jeder einen Rechten betragen. Da nun ein Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks kein Rechter sein kann, so ist die zweite Annahme unzulässig; mithin die erste, daſs A und B durch Zusammenklappen der Halbebenen zur Deckung kommen, die zutreffende. Wir erhalten also den Satz:

Wenn von den vier ausgezeichneten Linien, die zu derselben Seite eines Dreiecks gehören, zwei zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

Übungen zu § 33.

Vorbemerkungen. Im Dreieck sollen folgende Bezeichnungen Anwendung finden: 1) für die Fuſspunkte der Höhen: H_1 auf der Seite a, H_2 auf der Seite b, H_3 auf der Seite c; 2) für die Fuſspunkte der Halbierungslinien der Winkel beziehungsweise: W_1, W_2, W_3 für die Innenwinkel, W_1', W_2', W_3' für die Auſsenwinkel; 3) für die Mittelsenkrechten, die Höhen, die Winkelhalbierenden und die Mittellinien beziehungsweise: $s_1, s_2, s_3, h_1, h_2, h_3, w_1, w_2, w_3, w_1', w_2', w_3', m_1, m_2, m_3$; 4) für den Schnittpunkt der drei Höhen H, den der drei Mittellinien M, den Mittelpunkt des Umkreises U, die Mittelpunkte der Berührungskreise beziehungsweise: J, K_1, K_2, K_3; 5) für den Radius des Umkreises: r, für die Radien der Berührungskreise beziehungsweise: $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; 6) für die Berührungspunkte der Seiten und der Berührungskreise: A', B', C' für den Inkreis und beziehungsweise: $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ für die Ankreise; 7) für die Projektionen der Seiten a und b auf c: a_3 und b_3, der Seiten b und c auf a: b_1 und c_1, der Seiten c und a auf b: c_2 und a_2; 8) für die Abschnitte, welche die Fuſspunkte der Winkelhalbierenden mit den Ecken bestimmen: $AW_3 = \mathfrak{b}_3$, $BW_3 = \mathfrak{a}_3$, $AW_3' = \mathfrak{b}_3'$, $BW_3' = \mathfrak{a}_3'$, $BW_1 = \mathfrak{c}_1$, $CW_1 = \mathfrak{b}_1$,

$BW_1 = \mathfrak{c}_1'$, $CW_1' = \mathfrak{b}_1'$, $AW_2 = \mathfrak{c}_2$, $CW_2 = \mathfrak{a}_2$, $AW_2' = \mathfrak{c}_2'$, $CW_2' = \mathfrak{a}_2'$; 9) für einen Punkt auf einer Seite oder ausgezeichneten Linie des Dreiecks der entsprechende Buchstabe des grofsen deutschen Alphabetes.

1. Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks und die Mittellinien mit Hilfe je dreier Kreise zu zeichnen, die Halbierungslinien der Winkel (der Aufsenwinkel) und die Höhen mit Hilfe von je vier Kreisen.

2. In ähnlicher Weise wie bei den Winkelhalbierenden soll bewiesen werden, dafs je zwei Höhen (Mittellinien) eines Dreiecks sich schneiden (§ 21, 8).

3. Jeder Kreis, der die Centrale zweier Berührungskreise eines Dreiecks zum Durchmesser hat, geht durch zwei Ecken.

4. Welches ist der Ort für alle Punkte, für welche die Summe (Differenz) der Abstände von der Grundlinie und von der Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks gleich der zur Grundlinie gehörigen Höhe ist? (Siehe § 25, 2.)

5. Im gleichschenkeligen Dreieck sind je zwei gleichartige ausgezeichnete Linien, die zu den Schenkeln gehören, einander gleich. Jede Gerade, die die Fufspunkte von zwei solchen Linien verbindet, ist zur Grundlinie parallel. (Die Figur ist symmetrisch.)

6. Welche Beziehung haben drei Winkelhalbierende eines Dreiecks, die durch einen und denselben Punkt gehen, zu dem Dreieck, dessen Seiten die übrigen Winkelhalbierenden sind?

7. In ein gleichseitiges Dreieck drei gleiche Kreise so zu zeichnen, dafs jeder zwei Seiten und die beiden andern Kreise berührt. (Jeder Mittelpunkt liegt auf einer Achse des gegebenen Dreiecks, welche selbst wieder eine Achse des durch die Mittelpunkte bestimmten Dreiecks und eine gemeinschaftliche Tangente von zwei Kreisen ist. Somit hat auch jeder Mittelpunkt gleiche Abstände von einer Seite und der zugehörigen Höhe.)

8. Sowohl die Summe der drei Höhen als auch die Summe der drei Mittellinien ist kleiner als der Umfang des Dreiecks, die erste Summe ist aber kleiner als die zweite.

9. Die Abschnitte $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_3$ ($\mathfrak{a}_3'$ und $\mathfrak{b}_3'$), a_3 und b_3 sollen bezw. mit den Seiten a und b verglichen werden.

(Man vergleiche die Gegenwinkel von a und a_3 in dem Dreieck CBW_3 u. s. w.)

10. In jedem Dreieck ist die Summe der Halbierungslinien der Innenwinkel, im spitzwinkeligen auch die Summe der Höhen, gröſser als der halbe Umfang.

11. Der Abstand des Schnittpunktes der Mittellinien von einer Dreieckseite ist gleich dem dritten Teile der zu der Seite gehörigen Höhe. (Man betrachte die Mittellinie als Querstrecke eines Streifens, dessen einer Rand die zugehörige Seite ist.)

12. Zieht man durch eine Ecke eines Dreiecks die Parallele zu einer nicht zugehörigen Mittellinie, so wird auf der Parallele durch die Ecke und den Schnittpunkt mit der Gegenseite ein Abschnitt bestimmt, der doppelt so groſs wie jene Mittellinie ist, und auf der Verlängerung der Gegenseite der Ecke ein Abschnitt, der der Gegenseite gleich ist. (Die Parallele ist Seite eines Parallelogramms, in dem die Mittellinie des Dreiecks die Hälfte einer Mittellinie ist.)

13. Die Mittelsenkrechte einer Dreieckseite schneidet die Halbierungslinien der Winkel an der Gegenecke auf dem Umkreise.

14. Der Umkreis eines Dreiecks halbiert die Centralen von je zwei Berührungskreisen. (Siehe Nr. 3 und 13.)

15. Wenn man um die Ecke C des Dreiecks ABC, in dem $a > b$ ist, den Kreis mit dem Radius AC beschreibt, der AB in Q, das in A auf AB errichtete Lot in S und BC in P und P' schneidet, so ist: 1) $AS = 2h_3$, 2) $\sphericalangle SCB = 2R - (\alpha - \beta)$, 3) $BQ = a_3 - b_3$ oder $BQ = a_3 + b_3$, je nachdem $a < R$ oder $a > R$ ist, 4) $PW_3 = b_3$, 5) $\sphericalangle PW_3B = \alpha - \beta$, 6) $P'W_3' = b_3'$, 7) $\sphericalangle P'W_3'B = \alpha - \beta$.

Welche Beziehungen erhält man, wenn der Kreis um C mit der gröſsern Seite BC beschrieben, und in B das Lot auf AB errichtet wird?

16. Wenn von zwei Seiten eines Dreiecks jede auf der andern (auf der Verlängerung der andern) von dem gemeinschaftlichen Endpunkte aus abgetragen wird, so geht die Verbindungslinie der erhaltenen Endpunkte durch den Fusspunkt einer Winkelhalbierenden. (§ 19, Übung Nr. 7.)

17. Der Abstand der Mittelsenkrechten einer Seite und der zugehörigen Höhe ist gleich der halben Differenz oder gleich der halben Summe der Projektionen der beiden andern Seiten auf die zu der Höhe gehörigen, je nachdem diese Seite zwei spitze oder nur einen spitzen Anwinkel hat.

18. Dem einen von zwei gegebenen Kreisen ein rechtwinkeliges Dreieck so einzuschreiben, dafs die Hypotenuse und eine Kathete den zweiten Kreis berühren.

19. Dem einen von zwei gegebenen Kreisen ein rechtwinkeliges Dreieck einzuschreiben, dessen Katheten den zweiten Kreis berühren.

20. Dem einen von zwei gegebenen Kreisen ein gleichschenkeliges Dreieck einzuschreiben, dessen Schenkel den zweiten Kreis berühren.

21. Einem gegebenen Kreise ein Dreieck so einzuschreiben, dafs zwei Seiten desselben einen gegebenen Kreis berühren, und der von ihnen eingeschlossene Winkel einem gegebenen Winkel gleich ist.

22. In jedem Dreieck ist:

1) $M_3H_3 = \frac{a_3 \pm b_3}{2}$ oder $M_3H_3 = \frac{b_3 \pm a_3}{2}$;

2) $M_3W_3 = \frac{a_3 - b_3}{2}$ oder $M_3W_3 = \frac{b_3 - a_3}{2}$;

3) $M_3W_3' = \frac{a_3' + b_3'}{2}$;

4) $W_3H_3 = a_3 \pm a_3$ oder
$W_3H_3 = a_3 - a_3$; $W_3'H_3 = a_3' \pm a_3$.

23. In dem Dreiecke ABC ist:

1) $\sphericalangle CW_3B = R + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$;

2) $\sphericalangle CW_3'B = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$ oder $\sphericalangle CW_3'B = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$;

3) $\sphericalangle H_3CW_3 = UCW_3$ und $\sphericalangle UCW_3 = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$

oder

$$\sphericalangle UCW_3 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

(Bei (3) berücksichtige man, daſs die Winkel ACU und BCU Basiswinkel von gleichschenkeligen Dreiecken sind, in denen der Winkel an der Spitze ein Centriwinkel des Umkreises ist.)

24. In dem Dreieck ABC sollen folgende Winkel durch die Winkel des Dreiecks ausgedrückt werden: 1) die Winkel der Dreiecke, deren Ecken Berührungspunkte desselben Berührungskreises mit den Seiten sind, 2) die Winkel der Dreiecke, deren Ecken Mittelpunkte von Berührungskreisen sind.

25. Wenn in einem Dreieck, das weder gleichseitig noch gleichschenkelig ist, $\sphericalangle (m_3 w_3) = (h_3 w_3)$ ist, so ist das Dreieck rechtwinkelig. (Siehe Nr. 23.)

26. Einem gegebenen Kreise ein Dreieck so einzuschreiben, daſs zwei Seiten einen gegebenen Kreis berühren, und die Differenz ihrer Gegenwinkel einem gegebenen Winkel gleich ist. (Unter Berücksichtigung von Nr. 23, 3 ergiebt sich, daſs die Schenkel eines bekannten Winkels beziehungsweise durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise gehen.)

27. In welcher Beziehung stehen zu den Winkelhalbierenden eines Dreiecks die Seiten derjenigen Dreiecke, deren Ecken Berührungspunkte desselben Berührungskreises mit den Seiten des ersten Dreiecks sind?

28. Zieht man zu einer Dreieckseite (a) die Parallelen im Abstande einer nicht zugehörigen Höhe (h_2), und zu der Seite, welche zu dieser Höhe gehört, die Parallele durch die Gegenecke, so erhält man zwei Rhomben mit einer gemeinschaftlichen Seite. In der Figur sollen folgende Strecken aufgesucht werden: 1) $b+a$ 2) $b-a$ 3) h_1+h_2 4) h_1-h_2.

29. Die Abschnitte, die auf zwei Dreieckseiten durch die Berührungspunkte des Inkreises und eine und dieselbe Ecke begrenzt werden, sind um die Gegenseite dieser Ecke kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks. (Satz über die Gleichheit zweier Tangenten.)

30. Die Abschnitte, welche auf den Schenkeln eines Innenwinkels eines Dreiecks durch die Berührungspunkte des zugehörigen Ankreises und den Scheitel jenes Winkels begrenzt werden, sind gleich dem halben Umfang.

31. In dem Dreieck ABC gelten folgende Beziehungen: 1) $BC_1 = AC_2 = s-c$; 2) $AC_3 = s-b$ und $BC_3 = s-a$; 3) $C'C_1 = a$ und $C'C_2 = b$; 4) $C_1C_2 = a+b$ und

$C'C_3 = a - b$ oder $C'C_3 = b - a$; 5) $M_3C_1 = M_3C_2$ und $M_3C_3 = M_3C'$. In welchem Trapezoid der Figur ist wegen 5) die Mittelsenkrechte einer Dreieckseite die zu den Schenkeln gehörige Mittellinie?

32. Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Radien der Berührungskreise gleich dem Umfang. (Siehe Nr. 29—31. Jeder Radius kann als Kathete eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks betrachtet werden.)

33. Wenn zwei Dreiecke in einer Seite übereinstimmen, und deren Gegenwinkel gleich oder Supplementwinkel sind, so sind die Umkreise beider Dreiecke gleich. (Man denke sich das eine Dreieck so verschoben, daſs es mit dem andern Dreieck jene Seite gemein hat, und beide Dreiecke bezüglich der gemeinschaftlichen Seite in derselben Halbebene, beziehungsweise in verschiedenen Halbebenen liegen.)

34. Fällt man von einem Punkte des Umkreises eines Dreiecks die Lote auf die Seiten, so liegen die Fuſspunkte in einer Geraden (Simpsonsche Gerade). (Sind X, Y, Z die Fuſspunkte der von P auf die Seiten a, b, c gefällten Lote, so liegen die Punkte P, X, Y, C und P, A, Y, Z auf je einem und demselben Kreise. Hieraus folgt: $\sphericalangle XYC = XPC$ und: $\sphericalangle ZYA = ZPA$. Es ist aber: $\sphericalangle APC = 2R - \beta = \sphericalangle XPZ$, folglich: $\sphericalangle APC - ZPC = XPZ - ZPC$ oder $\sphericalangle ZYA = XYC$.)

35. Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel des Dreiecks der Höhenfuſspunkte. (Der Schnittpunkt der Höhen, eine Ecke und die Fuſspunkte der nicht zugehörigen Höhen liegen auf einem und demselben Kreise.)

36. Jeder Kreis, der durch den Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks und zwei Ecken bestimmt wird, ist dem Umkreise des Dreiecks kongruent. (Siehe Nr. 33.)

37. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1) A, H_2, H_3	2) A, H_1, H_3	3) H, H_2, H_3
4) H, H_2, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{A}$	5) A, B, H	6) H_1, M_3, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$
7) H_1, M_2, M_3	8) H_3, M_1, M_3	9) H_1, W_1, M_3
10) C, H_2, W_3	11) H_2, M, M_3	12) C, H_2, $\mathfrak{W}_3$, $\mathfrak{H}_1$
13) H_3, K_1, W_3'	14) H_3, M_3, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_3$	15) W_3, W_3', M_1
16) W_3, W_3', J	17) W_3', J, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{W}_3$	18) M_1, M_2, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$
19) M_1, M_3, U	20) M, M_1, M_3	21) M, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C

22) M, A, B 23) M_3, A, J 24) $M_2, H_3, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}$
25) M, A, M_2 26) K_1, J, K_2 27) K_1, K_2, K_3
28) K_1, K_2, M_3 29) $K_1, K_2, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_3$ 30) $K_1, K_2, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$
31) J, K_3, M_3 32) $J, H_3, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ 33) J, A, B
34) $K_2, J, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_3$ 35) $K_1, J, \mathfrak{W}_2', \mathfrak{C}$ 36) $U, W_3, \mathfrak{H}_3, \beta - a$.

Vorbemerkung. Bei den folgenden Aufgaben soll aus je einer Nummer von I und von II eine Aufgabe gebildet werden. Für die Lösungen kommen von den vorstehenden Sätzen besonders die folgenden in Betracht: 11, 13, 15, 17, 22, 23, 28—31. Den über die Konstruktion von Streifenecken gemachten Bemerkungen ist noch hinzuzufügen: Wenn nach Festlegung einer Ecke oder zweier Ecken für die fehlenden Ecken nicht unmittelbar Orte angegeben werden können, so suche man, nachdem die gegebenen Gröfsen in die Figur eingetragen oder auf Grund von Sätzen in der Figur aufgesucht worden sind, ein Dreieck, für welches drei Stücke, von denen mindestens eines kein Winkel ist, durch die gestellte Aufgabe gegeben sind. Nachdem dieses Hilfsdreieck als konstruierbar erkannt ist, benutze man es nebst den noch nicht verwerteten Angaben, um Orte für die Ecken des gesuchten Dreiecks abzuleiten. Bei Aufgaben, in denen eine Mittellinie gegeben ist, bedenke man, dafs in jedem Dreieck der Fufspunkt einer Mittellinie als Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms betrachtet werden kann, und dafs durch drei Ecken des Parallelogramms auch die vierte bestimmt ist. Siehe auch § 22, Übung Nr. 10.

38. I. 1) a, h_3 2) h_3, β 3) $h_3, \sphericalangle(h_3 a)$ 4) h_3, a_3 5) a, β 6) a, a_3 7) β, a_3 8) $a + h_3, \beta$ 9) $a - h_3, a_3$ 10) $a_3, \sphericalangle(h_3 a)$ 11) $a + a_3, \beta$ 12) $a - a_3, h_3$ 13) $h_3 - a_3, \beta$ 14) $h_3 + a_3, \sphericalangle(a h_3)$ 15) $a_3 - h_3, a$.

II. 1) b 2) c 3) γ 4) a 5) $\beta - a$ 6) h_1 7) h_2 8) m_1 9) m_2 10) m_3 11) w_2 12) w_3 13) w_2' 14) w_3' 15) $\sphericalangle(m_3 a)$ 16) $\sphericalangle(m_2 a)$ 17) $\sphericalangle(m_1 a)$ 18) b_1 19) c_1 20) b_3 21) a_2 22) $\mathfrak{a}_3$ 23) $\mathfrak{a}_3'$ 24) s_1 25) s_3 26) $a + b$ 27) $b - a$ 28) $b \pm c$ 29) $a + c$ 30) $c - a$ 31) $\gamma - a$ 32) $\beta - \gamma$ 33) $a + b + c$ 34) $a + c - b$ 35) $b + c - a$

36) $b \pm h_3$ 37) $m_3 \pm h_3$ 38) $b_3 \pm a_3$ 39) $(b_3 \pm a_3) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$ 40) $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b_3 \pm a_3)$ 41) r 42) ϱ 43) ϱ_1 44) ϱ_2 50) ϱ_3 51) $h_3 \pm \varrho$ 53) $\varrho_2 - h_3$.

39. I. 1) m_3, h_3 2) m_3, $\sphericalangle(cm_3)$ 3) h_3, $\sphericalangle(cm_3)$ 4) h_3, $b_3 \pm a_3$ 5) $h_3 + m_3$, $\sphericalangle(cm_3)$ 6) $m_3 - h_3$, $b_3 \pm a_3$ 7) m_3, $\sphericalangle(m_3 h_3)$ 8) h_3, $\sphericalangle(m_3 h_3)$ 9) $\sphericalangle(m_3 h_3)$, $b_3 \pm a_3$ 10) $b_3 \pm a_3$, $\sphericalangle(cm_3)$ 11) m_3, $b_3 \pm a_3$.

II. 1) a 2) c 3) a 4) γ 5) $\beta - a$ 6) h_1 7) m_1 8) w_3 9) w_3' 10) b_3 11) s_3 12) r 13) $c \pm m_3$ 14) $a \pm m_3$ 15) $c \pm h_3$ 16) $h_3 \pm s_3$ 17) $\sphericalangle(m_1 m_3)$ 18) $\sphericalangle(m_1 h_3)$ 19) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 20) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$ 21) $(b_3 \pm a_3) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$ 22) $(b_3 \pm a_3) + (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$ 23) $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b_3 \pm a_3)$ 24) $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') + (b_3 \pm a_3)$.

40. I. 1) c, h_3.

II. 1) a 2) γ 3) $\beta - a$ 4) m_1 5) m_3 6) a_3 7) $b_3 \pm a_3$ 8) $\sphericalangle(am_1)$ 9) $\sphericalangle(am_3)$ 10) $\sphericalangle(m_1 m_2)$ 11) $\sphericalangle(m_1 m_3)$.

41. I. 1) m_3, c.

II. 1) a 2) a 3) γ 4) m_2 5) $\sphericalangle(am_3)$ 6) $\sphericalangle(cm_3)$ 7) $\sphericalangle(cm_2)$ 8) $\sphericalangle(m_1 m_2)$ 9) $\sphericalangle(m_1 m_3)$.

42. I. 1) c, $\sphericalangle(cm_1)$.

II. 1) $m_1 \pm m_2$ 2) $\sphericalangle(cm_3)$ 3) $\sphericalangle(m_1 m_2)$ 4) $\sphericalangle(m_2 m_3)$ 5) $b_3 \pm a_3$.

43. I. 1) a, m_3.

II. 1) b 2) c 3) a 4) β 5) γ 6) $\sphericalangle(am_3)$ 7) $\sphericalangle(bm_3)$ 8) $\sphericalangle(cm_3)$.

44. I. 1) m_1, m_2.

II. 1) a 2) c 3) m_3 4) $\sphericalangle(m_1 m_2)$ 5) $\sphericalangle(cm_1)$ 6) $\sphericalangle(am_1)$.

45. I. 1) $m_1 \pm m_2$, $\sphericalangle(m_1 m_2)$.

II. 1) c 2) $\sphericalangle(cm_1)$ 3) m_3 4) $\sphericalangle(m_1 m_3)$.

46. I. 1) $\sphericalangle(am_3)$, $\sphericalangle(bm_3)$.

II. 1) a 2) $a \pm b$ 3) m_3 4) h_1 5) a_2.

47. I. 1) m_3, γ.

II. 1) a 2) $b \pm a$ 3) $\sphericalangle (b m_1)$ 4) $\sphericalangle (b m_3)$.

48. I. 1) m_3, h_1 2) m_3, $\sphericalangle (h_1 m_3)$ 3) m_3, $\sphericalangle (a m_3)$ 4) h_1, $\sphericalangle (a, m_3)$ 5) h_1, $\sphericalangle (h_1 m_3)$.

II. 1) a 2) b 3) c 4) α 5) β 6) γ 7) $b \pm a$ 8) h_2 9) m_2 10) b_1.

49. I. 1) c, $m_3 \pm a$ 2) c, $a - m_3$.

II. 1) β 2) $\sphericalangle (c m_3)$ 3) $\sphericalangle (a m_3)$ 4) h_1.

50. I. 1) c, s_3 2) r, s_3 3) r, c 4) $r \pm s_3$, c 5) s_3, γ 6) r, γ 7) $r \pm s_3$, γ.

II. 1) a 2) α 3) $a - \beta$ 4) h_1 5) h_3 6) m_3 7) s_1 8) a_3 9) c_1 10) ϱ 11) ϱ_1 12) ϱ_3 13) $a \pm c$ 14) $b \pm c$ 15) $b \pm a$ 16) $b_3 \pm a_3$ 17) $h_3 \pm s_3$ 18) $m_3 \pm r$ 19) $r \pm s_2$ 20) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 21) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$ 22) $\sphericalangle (m_3 h_3)$.

51. I. 1) r, $h_3 - s_3$ 2) r, $b_3 \pm a_3$ 3) $r + h_3 - s_3$, $b_3 \pm a_3$ 4) $r + b_3 \pm a_3$, $\beta - \alpha$ 5) r, $\beta - \alpha$ 6) $h_3 - s_3$, $\beta - \alpha$ 7) $r \mp h_3 \pm s_3$, $\beta - \alpha$ 8) $h_3 - s_3$, $b_3 \pm a_3$.

II. 1) a 2) c 3) α 4) γ 5) h_3 6) m_3 7) w_3 8) w_3' 9) s_1 10) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 11) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$.

52. I. 1) s_1, s_3.

II. 1) β 2) $\sphericalangle (s_1 s_3)$ 3) b.

53. I. 1) s_3, $b_3 \pm a_3$.

II. 1) c 2) $\beta - \alpha$ 3) h_3 4) m_3 5) b_3 6) $h_3 \pm r$.

54. I. 1) w_3, $\beta - \alpha$ 2) w_3, h_3 3) w_3, $\mathfrak{a}_3 \pm a_3$ 4) h_3, $\beta - \alpha$ 5) $\mathfrak{a}_3 \pm a_3$, $\beta - \alpha$ 6) h_3, $\mathfrak{a}_3 \pm a_3$ 7) w_3', $\beta - \alpha$ 8) w_3', h_3 9) w_3', $\mathfrak{a}_3' \pm a_3$ 10) $\mathfrak{a}_3' \pm a_3$, $\beta - \alpha$ 11) $w_3 \pm h_3$, $\beta - \alpha$ 12) $h_3 \pm (\mathfrak{a}_3 \pm a_3)$, $\beta - \alpha$ 13) $w_3' \pm h_3$, $\beta - \alpha$ 14) $h_3 \pm (\mathfrak{a}_3' \pm a_3)$, $\beta - \alpha$ 15) $h_3 \pm (\mathfrak{a}_3 \pm a_3)$, w_3 16) $h_3 \pm (\mathfrak{a}_3' \pm a_3)$, w_3' 17) $(b_3 \pm a_3) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$, $\beta - \alpha$ 18) $(b_3 \pm a_3) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$, h_3 19) $(b_3 \pm a_3) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$, w_3 20) $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b_3 \pm a_3)$, $\beta - \alpha$ 21) $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b_3 \pm a_3)$, h_3 22) $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b_3 \pm a_3)$, w_3'.

II. 1) a 2) β 3) γ 4) a_3 5) $\mathfrak{b}_3$ 6) $\mathfrak{a}_3'$ 7) r 8) ϱ 9) ϱ_1 10) ϱ_3 11) $\gamma - a$ 12) $\beta - \gamma$ 13) $h_3 \pm \varrho$ 14) $h_3 \pm \varrho_1$ 15) $h_3 \pm \varrho_2$ 16) $h_3 \pm r$ 17) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 18) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$ 19) $b_3 \pm a_3$ 20) $\varrho_1 + \varrho_3$ 21) $r \pm s_3$.

55. I. 1) w_3, w_3' 2) $w_3' \pm w_3$, $\beta - a$ 3) $\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3'$, w_3 4) $\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3'$, w_3' 5) $\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3'$, $\beta - a$ 6) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$, w_3 7) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$, w_3' 8) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$, $\beta - a$ 9) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$, h_3.

II. 1) a 2) γ 3) a 4) $\mathfrak{a}_3$ 5) $\mathfrak{b}_3'$ 6) ϱ 7) ϱ_1 8) ϱ_2 9) $\gamma - a$ 10) $\beta - \gamma$ 11) $h_3 \pm \varrho$ 12) $h_3 \pm \varrho_1$ 13) $\varrho_3 \pm h_3$ 14) $\varrho_1 + \varrho_2$ 15) r 16) $r \pm s_3$.

56. I. 1) ϱ, a 2) ϱ, $s - a$ 3) a, $s - a$.

II. 1) a 2) b 3) h_1 4) h_3 5) γ 6) $\beta - a$ 7) $\beta - \gamma$ 8) b_3 9) $\mathfrak{b}_3$ 10) $b - a$ 11) $c - a$ 12) $2s$ 13) $s - b$ 14) ϱ_1 15) ϱ_3 16) $\varrho_2 - \varrho$ 17) $\varrho_3 + \varrho$ 18) $h_3 + \varrho$ 19) r.

57. I. 1) ϱ, $\beta - a$ 2) $(b - a) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$, $\beta - a$ 3) $(b - a) - (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$, ϱ.

II. 1) $s - a$ 2) a 3) γ 4) $\beta - \gamma$ 5) $\gamma - a$ 6) h_3 7) $\mathfrak{a}_3$ 8) $\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3'$ 9) $\mathfrak{a}_3 \pm a_3$ 10) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$ 11) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 12) ϱ_3 13) $r - s_3$.

58. I. 1) ϱ_1, β 2) ϱ_1, $s - c$ 3) β, $a + b - c$.

II. 1) a 2) c 3) a 4) γ 5) $\beta - a$ 6) $2s$ 7) $a + b$ 8) $c - b$ 9) $a + c - b$ 10) $b + c - a$ 11) h_1 12) h_2 13) a_3 14) $\mathfrak{a}_3$ 15) $\mathfrak{a}_3'$ 16) ϱ 17) ϱ_2 18) ϱ_3.

59. I. 1) ϱ_1, s 2) ϱ_1, a 3) a, s.

II. 1) a 2) b 3) c 4) h_1 5) h_2 6) β 7) γ 8) $\beta - a$ 9) $\beta - \gamma$ 10) $\mathfrak{b}_3'$ 11) $\mathfrak{c}_2'$ 12) ϱ 13) ϱ_2 14) ϱ_3 15) $\varrho_1 + \varrho_2$ 16) $\varrho_3 - \varrho_1$ 17) $h_3 - \varrho_1$ 18) $a + b$ 19) $a + c$ 20) $s - a$ 21) $s - b$ 22) $s - c$ 23) r.

60. I. 1) $\beta - a$, ϱ_1 2) $\beta - a$, $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b + a)$ 3) ϱ_1, $(\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3') - (b + a)$.

II. 1) $a + b$ 2) $s - c$ 3) a 4) γ 5) $\beta - \gamma$ 6) $\gamma - a$ 7) ϱ_2 8) $\mathfrak{b}_3'$ 9) $\mathfrak{a}_3' + \mathfrak{a}_3$ 10) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$ 11) $\mathfrak{b}_3' - b_3$ 12) $r + s_3$.

61. I. 1) $b - a$, $\mathfrak{b}_3 \pm a_3$ 2) $b + a$, $\mathfrak{b}_3 \pm a_3$.

II. 1) α 2) β 3) γ 4) $\beta - \alpha$.

62. I. 1) a, β.

II. 1) w_3 2) w_3' 3) $w_3 - a$ 4) $a \pm w_3$ 5) $b + (a_3 \pm b_3)$ 6) $(b_3 + a_3) \pm (b - a)$ 7) $(b - a) \pm (b_3 \pm a_3)$ 8) $(b - a) \pm (\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$ 9) $(\mathfrak{a}_3' + \mathfrak{b}_3') \pm (b + a)$.

63. I. 1) $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$ 2) $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{b}_3'$ 3) $b - a$, $\mathfrak{a}_3$ 4) $b + a$, $\mathfrak{a}_3'$.

II. 1) α 2) β 3) $\beta - \alpha$.

64. I. 1) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$, $b - a$ 2) $\mathfrak{b}_3' - \mathfrak{a}_3'$, $b + a$.

II. 1) α 2) β 3) γ 4) $\beta - \alpha$.

65. I. 1) $h_3 + \varrho_3$, $\beta - \alpha$ 2) $h_3 - \varrho$, $\beta - \alpha$ 3) $h_3 - \varrho_1$, $\beta - \alpha$.

II. 1) α 2) β 3) γ 4) $\mathfrak{a}_3 \pm a_3$ 5) $\mathfrak{a}_3' \pm a_3$ 6) w_3 7) w_3'.

66. I. 1) $h_3 + \varrho_3$, $2s$ 2) $h_3 - \varrho$, $s - c$ 3) $h_3 - \varrho_1$, $s - b$ 4) s_3, $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 5) s_3, $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$ 6) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$, h_3 7) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$, h_3 8) $b_3 \pm a_3$, b.

II. 1) $\beta - \alpha$.

67. I. 1) ϱ, $b - a$ 2) ϱ_3, $b - a$.

II. 1) c 2) s_3 3) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 4) $r - s_3$.

68. I. 1) a, $\varrho_1 - \varrho$ 2) $\varrho_1 - \varrho$, a.

II. 1) β 2) $\beta - \alpha$ 3) $\beta - \gamma$ 4) $\gamma - \alpha$ 5) $2s$ 6) $b + c$ 7) $s - a$ 8) ϱ 9) $\varrho_1 + \varrho$ 10) $h_3 - \varrho$ 11) $h_3 - \varrho_1$.

69. I. 1) $b - a$, $\varrho + \varrho_3$ 2) $\varrho_3 + \varrho$, $\beta - \alpha$ 3) $b - a$, $\beta - \alpha$.

II. 1) α 2) γ 3) $\gamma - \beta$ 4) $r - s_3$ 5) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 6) $b_3 \pm a_3$.

70. I. 1) $a + b$, $\varrho_2 - \varrho_1$ 2) $\varrho_2 - \varrho_1$, $\beta - \alpha$ 3) $a + b$, $\beta - \alpha$.

II. 1) α 2) β 3) γ 4) ϱ_1 5) $\varrho_1 + \varrho_2$ 6) $b_3 \pm a_3$ 7) $h_3 - \varrho_1$ 8) $\mathfrak{a}_3' + \mathfrak{b}_3'$.

71. I. 1) $h_1 \pm h_2$, γ 2) $h_1 \pm h_2$, $a \pm b$.

II. 1) α 2) b 3) c 4) α 5) $a \mp b$ 6) $\gamma - \alpha$ 7) $\alpha - \beta$ 8) $\beta - \gamma$.

§ 34. Die Kongruenz der Dreiecke.

1. Denkt man sich auf die Ebene einer symmetrischen Figur eine zweite Ebene gelegt und die Figur durchgepaust (Fig. 103), so kann man sich die eine Ebene so um die Achse der Figur umgeklappt denken, daſs jede ihrer Halbebenen mit der entgegengesetzten Halbebene der festen Ebene zur Deckung kommt. Zwei Gebilde der festen Ebene sind symmetrisch, wenn das eine vor dem Umklappen der Hilfsebene durch dasselbe Gebilde der Hilfsebene gedeckt

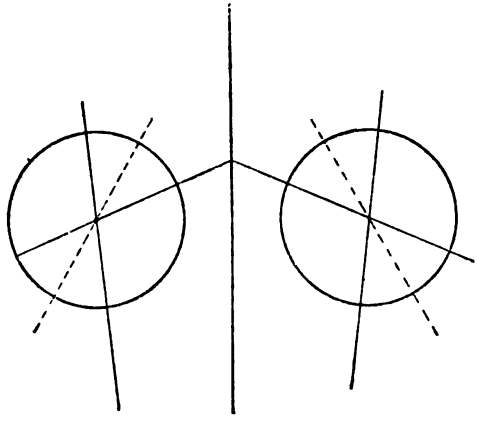


Fig. 103.

wird wie das andere nach dem Umklappen. Es ergeben sich ohne weiteres die Sätze:

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist symmetrisch zu der Verbindungslinie der symmetrischen Punkte, und die Endpunkte einer Strecke sind beziehungsweise symmetrisch zu den Endpunkten der symmetrischen Strecke.

Der Mittelpunkt einer Strecke ist symmetrisch zu dem Mittelpunkte der symmetrischen Strecke.

Die Schnittpunkte zweier Linien sind beziehungsweise symmetrisch zu den Schnittpunkten der symmetrischen Linien, und die Anzahl dieser ist gleich der Anzahl jener.

Der Schnittpunkt zweier Geraden ist symmetrisch zu dem Schnittpunkte der symmetrischen Geraden.

Symmetrische Linien begrenzen symmetrische Flächen, und symmetrische Flächen werden durch symmetrische Linien begrenzt.

Der Winkel zweier Strahlen ist symmetrisch zu dem Winkel der symmetrischen Strahlen, und symmetrische Winkel werden durch Strahlen begrenzt, die beziehungsweise symmetrisch sind.

Die Halbierungslinien von symmetrischen Winkeln sind symmetrisch.

Sind zwei Gerade parallel (senkrecht zueinander), so sind die symmetrischen Geraden ebenfalls parallel (senkrecht zueinander).

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist symmetrisch zu der Mittelsenkrechten der symmetrischen Strecke.

Sind zwei Dreiecke symmetrisch, so sind ebenfalls symmetrisch die Gegenseiten von symmetrischen Winkeln und die Gegenwinkel von symmetrischen Seiten.

Die Beziehung symmetrischer Linien oder Flächen ist in dem einen Satze enthalten:

Symmetrische Gebilde sind kongruent.

Die Kongruenz zweier Gebilde wird durch das Zeichen $\cong$ angedeutet.

Da zwei symmetrische Figuren, die eine gemeinschaftliche Achse besitzen, wieder eine symmetrische Figur bilden, so kann man mit Hilfe der bekannten symmetrischen Figuren

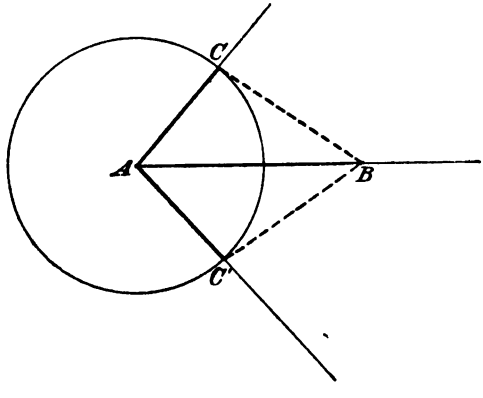


Fig. 104.

neue entstehen lassen und auf diese die vorstehenden Sätze anwenden.

2. Ein halbierter Winkel, ein Punkt B auf der Halbierungslinie und ein Kreis um den Scheitel A, der die Schenkel in C und C' schneidet, bilden eine symmetrische Figur (Fig. 104). Es ist also: $ABC \cong ABC'$. Nach Voraussetzung ist aber: 1) $AB = AB$; 2) $AC = AC'$; 3) $\sphericalangle BAC = BAC'$. Folglich erhält man den Satz:

Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel und dessen Anseiten übereinstimmen, so sind sie kongruent.

3. Zwei Winkel mit gemeinschaftlicher Halbierungslinie bilden eine symmetrische Figur. Schneiden sich die Schenkel der einen Halbebene in einem Punkte C (Fig. 105),

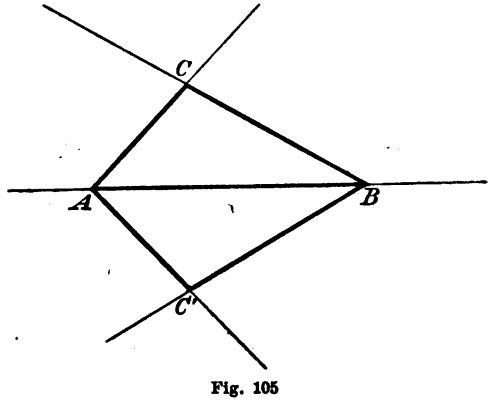


Fig. 105

so schneiden sich die Schenkel der andern Halbebene in dem Punkte C', der zu C symmetrisch ist, und es ist: $ABC \cong ABC'$. Nach Voraussetzung ist aber: 1) $AB = AB$; 2) $\sphericalangle CAB = C'AB$; 3) $\sphericalangle CBA = C'BA$.

Berücksichtigt man, daſs Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, auch in dem dritten Winkel übereinstimmen, so erhält man den Satz:

Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und ihren Anwinkeln oder in einer Seite, einem Anwinkel und dem Gegenwinkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

4. Zwei sich schneidende Kreise A und B bilden eine symmetrische Figur (Fig. 106). Da in jeder der durch die Centrale bestimmten Halbebenen ein einziger Schnittpunkt liegt, so ist: $ABC \cong ABC'$. Nach Voraussetzung ist aber: 1) $AB = AB$; 2) $AC = AC'$; 3) $BC = BC'$. Somit folgt:

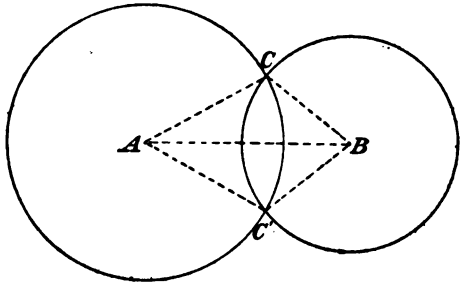


Fig. 106.

Wenn zwei Dreiecke in den Seiten übereinstimmen, so sind sie kongruent.

5. Wird in dem Punkte C eines Kreisdurchmessers auf diesem das Lot errichtet, welches den Kreis in A und A' schneidet, so erhält man eine symmetrische Figur (Fig. 107). In jeder der beiden Halbebenen, die durch den angenommenen Durchmesser bestimmt werden, liegt ein einziger Schnittpunkt des Kreises und des Lotes; folglich ist: $ABC \cong A'BC$. Nach Voraussetzung ist: 1) $AB = A'B$; 2) $BC = BC$; 3) $\sphericalangle BCA = BCA' = R$. Somit ergiebt sich:

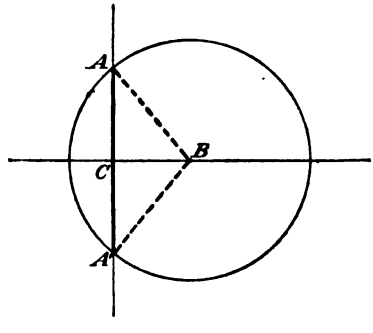


Fig. 107.

Wenn zwei rechtwinkelige Dreiecke in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen, so sind sie kongruent.

6. Wird um den Punkt B der Halbierungslinie eines Winkels ein Kreis beschrieben, so wird, wenn der Scheitel A

innerhalb des Kreises liegt, jeder Schenkel in einem einzigen Punkte geschnitten (Fig. 108). Liegt A aufserhalb des Kreises (Fig. 109), so kann jeder Schenkel in zwei Punkten geschnitten werden.

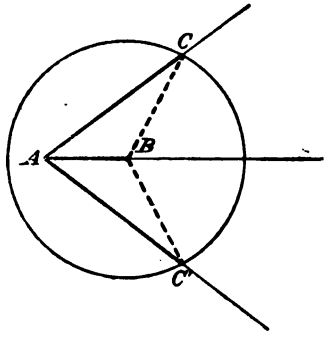


Fig. 108.

Im erstern Falle ergiebt sich: $ABC \cong ABC'$. Nach Voraussetzung ist aber: 1) $\sphericalangle CAB = C'AB$; 2) $AB = AB$; 3) $BC = BC'$; 4) $AB < BC$.

Wenn im zweiten Falle der Kreis um B jeden Schenkel in zwei Punkten schneidet, so erhält man zwei Paare von kongruenten Dreiecken: 1) $ABC \cong ABC'$, 2) $ABD \cong ABD'$. Nach Voraussetzung ist aber: 1) $\sphericalangle DAB = D'AB$; 2) $AB = AB$; 3) $BC = BD = BC' = BD'$; 4) $AB > BC$. Da nun die Dreiecke BCD und $BC'D'$ gleichschenkelig und kongruent sind, so sind die Winkel ACB und $AC'B$ Supplementwinkel der Winkel ADB und $AD'B$. In je

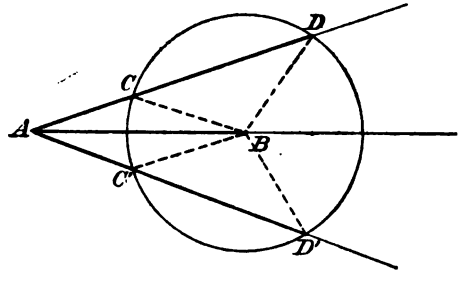


Fig. 109.

zwei nicht kongruenten Dreiecken sind somit die Gegenwinkel der als die gröfsere bezeichneten Seite Supplementwinkel. Folglich erhalten wir die Sätze:

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der gröfsern übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleinern überein, so sind sie entweder kongruent, oder die Gegenwinkel der gröfsern Seite sind Supplementwinkel.

7. Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, so bezeichnet man als homolog je zwei Gebilde beider Dreiecke, die bei symmetrischer Lage der Dreiecke selbst symmetrisch liegen. Somit ergiebt sich der Satz:

Homologe Gebilde kongruenter Dreiecke sind gleich.

Die Kongruenzsätze sind eines der wichtigsten Hilfsmittel, um die Gleichheit von geometrischen Gebilden zu beweisen.

Übungen zu § 34.

1. Welche Form nehmen die beiden ersten Kongruenzsätze für rechtwinkelige und der zweite für gleichschenkelige Dreiecke an?

2. Die Sätze über Querstrecken desselben Streifens, über das Parallelogramm, über die Halbierungslinie eines Winkels, über das gleichschenkelige Dreieck, über die Gleichheit zweier Tangenten, die von denselben Punkte ausgehen und denselben Kreis berühren, über die Mittelpunktsabstände von Punkten, von denen aus gleiche Tangenten an denselben Kreis gezogen werden können, oder von denen aus ein Kreis unter gleichen Winkeln gesehen wird, oder zu denen gleiche Berührungsehnen gehören, sollen mit Hilfe von Kongruenzsätzen bewiesen werden.

3. Beschreibt man um die Ecken eines Quadrats gleiche Kreise, so bestimmen die acht Schnittpunkte dieser Kreise und der Seiten (Seitenverlängerungen) zwei Quadrate.

4. Beschreibt man um die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks gleiche Kreise, so bestimmen die sechs Schnittpunkte dieser Kreise und der Seiten (Verlängerungen der Seiten) zwei gleichseitige Dreiecke.

5. Liegen die Ecken eines Quadrats (eines gleichseitigen Dreiecks) auf den Seiten (Verlängerungen der Seiten) eines zweiten Quadrats (gleichseitigen Dreiecks), so haben beide Quadrate (Dreiecke) konzentrische Umkreise.

6. Ein Quadrat von gegebener Diagonale (Seite) zu zeichnen, dessen Ecken auf den Seiten (Verlängerungen der Seiten) eines gegebenen Quadrats liegen.

7. Ein gleichseitiges Dreieck von gegebener Höhe (Seite) zu zeichnen, dessen Ecken auf den Seiten (Verlängerungen der Seiten) eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks liegen.

8. Sind A', B', C', D' vier Punkte auf den Seiten AB, BC, CD, AD eines Parallelogramms, und ist $AA' = BB' = CC' = DD'$, so bestimmen jene Punkte ein neues Parallelogramm.

9. Wird in einem Parallelogramm jede Seite über jeden Endpunkt hinaus um die Nachbarseite verlängert, so wird durch je vier Endpunkte von Verlängerungen, die auf vier verschiedenen Seiten liegen und von vier verschiedenen Ecken ausgehen, ein neues Parallelogramm bestimmt. Die Diagonalen und die Mittellinien der neuen Parallelogramme gehen durch den Schnittpunkt der Diagonalen des alten.

10. Die folgenden symmetrichen Figuren enthalten Kongruenzsätze, die ausgesprochen werden sollen:

1) Ein halbierter Winkel und ein Lot zur Halbierungslinie.

2) Eine Strecke mit ihrer Mittelsenkrechten und ein Punkt auf der letztern.

3) Ein Kreis mit zwei sich schneidenden Tangenten.

4) Ein Streifen mit seiner Achse, ein Lot zu dieser und ein Punkt der Achse.

5) Ein in vier gleiche Teile geteilter Winkel, ein Kreis um den Scheitel und ein Punkt auf der Halbierungslinie des Winkels.

6) Vier Gerade, die die Ebene in gleiche Winkel teilen, der Kreis um ihren gemeinschaftlichen Schnittpunkt und ein Punkt auf einer der vier Geraden.

7) Zwei Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel, die durch die Achse eines Streifens halbiert werden, und das Lot zur Streifenachse im Scheitel der Winkel.

8) Ein in vier gleiche Teile geteilter Winkel, ein Kreis um den Scheitel und zwei Gerade, die bezüglich der Halbierungslinie des Winkels symmetrisch liegen, und von denen jede durch einen Schnittpunkt des Kreises und einer Halbierungslinie einer Winkelhälfte geht.

9) Ein Kreis mit einem Durchmesser, zwei Punkte des Durchmessers in gleichen Abständen von dem Mittelpunkte und ein Centriwinkel, der von dem Durchmesser halbiert wird.

10) Ein Winkel, der durch die Achse eines Streifens halbiert wird, und zwei Gerade, die bezüglich der Streifenachse symmetrisch liegen, und von denen jede einen Schenkel des Winkels auf einem Streifenrande schneidet.

11) Eine Strecke mit ihrer Mittelsenkrechten, ein Punkt der Mittelsenkrechten und zwei Gerade, die bezüglich der Mittelsenkrechten symmetrisch liegen, und von denen jede durch einen Endpunkt der Strecke geht.

12) Eine halbierte Strecke auf der Achse eines Streifens und ein Kreis um den Mittelpunkt der Strecke, der die Ränder schneidet.

13) Ein Streifen mit seiner Achse und ein Kreis um einen Punkt der Achse, der die Ränder schneidet.

14) Ein halbierter Winkel, ein Kreis um den Scheitel, ein Punkt auf der Halbierungslinie und die Mittelsenkrechten der Strecken, welche diesen Punkt mit den Schnittpunkten des Kreises und der Schenkel des Winkels verbinden.

15) Ein halbierter Winkel, ein Kreis um einen Punkt der Halbierungslinie, der die Schenkel schneidet, und die Mittelsenkrechten von zwei Schenkelabschnitten, die bezüglich der Halbierungslinie des Winkels in verschiedenen Halbebenen liegen und von dem Scheitel einerseits und einem Schnittpunkte des Kreises und eines Schenkels andererseits begrenzt werden.

16) Zwei Kreise, von denen keiner den Mittelpunkt des andern einschließt, und die Tangenten an jeden Kreis durch den Mittelpunkt des andern.

17) Ein halbierter Winkel, ein Kreis um den Scheitel und zwei Tangenten dieses Kreises, die durch denselben Punkt der Halbierungslinie des Winkels gehen.

18) Ein Kreis um den einen Endpunkt einer halbierten Strecke, die Tangenten durch den andern Endpunkt und ein Kreis um den Mittelpunkt der Strecke, welcher jene Tangenten schneidet.

§ 35. Merkwürdige Eigenschaften des Dreiecks.

1. Werden die Mittelpunkte der obern Höhenabschnitte AH, BH, CH beziehungsweise durch H_1', H_2', H_3' bezeichnet (Fig. 109), und die übrigen Bezeichnungen wie sonst gewählt, so ergiebt sich:

In dem Dreieck BCH verbindet $H_2'H_3'$ die Mittelpunkte zweier Seiten, also: $H_2'H_3' \| BC$ und $H_2'H_3' = \frac{1}{2} BC$. Ebenso ergiebt sich: $M_2M_3 \| BC$ und $M_2M_3 = \frac{1}{2} BC$. Somit folgt: $H_2'H_3' \| M_2M_3$ und $H_2'H_3' = M_2M_3$. Also ist $M_2M_3H_2'H_3$ ein Parallelogramm (§ 23, 3 und Übung Nr. 2).

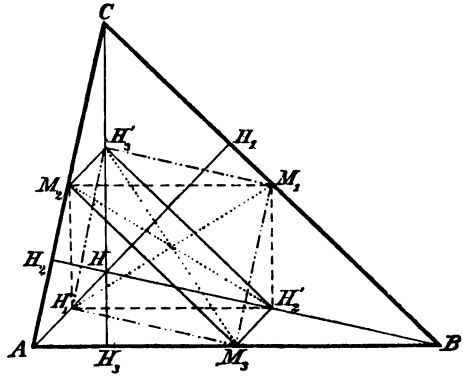


Fig. 109.

Die Strecke M_2H_3' verbindet in dem Dreieck ACH die Mittelpunkte zweier Seiten, folglich $M_2H_3' \| AH$. Da AH auf BC senkrecht steht, so ist auch M_2H_3' senkrecht zu BC, mithin auch zu der Geraden M_2M_3, die zu BC parallel ist. Das Parallelogramm $M_2M_3H_2'H_3'$ ist also ein Rechteck, durch die Punkte M_2, M_3, H_2' und H_3' kann ein Kreis gelegt werden, und die Strecken M_2H_2' und M_3H_3' sind Durchmesser dieses Kreises (§ 23, 7).

In derselben Weise wird gezeigt, daſs durch die Punkte M_3, M_1, H_3', H_1' und durch die Punkte M_1, M_2, H_1', H_2' je ein Kreis geht, daſs M_3H_3' und M_1H_1' Durchmesser des ersten und M_1H_1' und M_2H_2' Durchmesser des zweiten Kreises sind.

Die Vergleichung der bekannten Durchmesser der drei Kreise läfst weiter erkennen, dafs je zwei dieser Kreise einen Durchmesser gemein haben, also zusammenfallen; somit bilden alle drei einen einzigen Kreis.

Die Schenkel des rechten Winkels $H_3'H_3M_3$ gehen durch die Endpunkte eines Durchmessers des betrachteten Kreises, folglich liegt der Scheitel H_3 auf der Kreislinie. Ebenso wird gezeigt, dafs die übrigen Höhenfufspunkte auf demselben Kreise liegen. Somit ergiebt sich der Satz:

Die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks, die Fufspunkte der Höhen und die Mittelpunkte der obern Höhenabschnitte liegen auf einem Kreise. (Feuerbachscher Kreis.)

2. Die Geraden HC und UM_3 (Fig. 110) stehen beide auf AB senkrecht, also $UM_3 \| HC$.

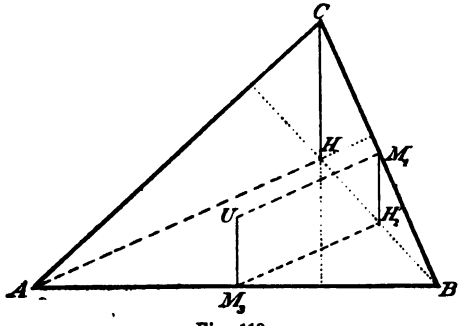


Fig. 110.

In dem Dreieck HCB verbindet M_1H_2' die Mittelpunkte zweier Seiten, folglich: $M_1H_2' \| HC$; mithin auch: $UM_3 \| M_1H_2'$. In derselben Weise wird bewiesen, dafs $UM_1 \| M_3H_2'$ ist. Es folgt hieraus, dafs $UM_1H_2'M_3$ ein Parallelogramm und $UM_3 = M_1H_2'$, also auch $UM_3 = \frac{1}{2} CH$ ist. In Worten:

Jede Mittelsenkrechte eines Dreiecks ist halb so grofs wie der obere Abschnitt der zu ihr parallelen Höhe.

3. Wird UM_3 so verlängert, daſs $M_3V = UM_3$ ist (Fig. 111), so ist $UV = HC$ und $UV \| HC$; folglich $UCHV$ ein Parallelogramm. UH ist eine Diagonale des Parallelogramms und CM_3 die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte einer nicht zugehörigen Seite; folglich wird CM_3 durch UH so geteilt, daſs der von der Ecke ausgehende Abschnitt doppelt so groſs ist wie der andere (§ 23, Übung 11).

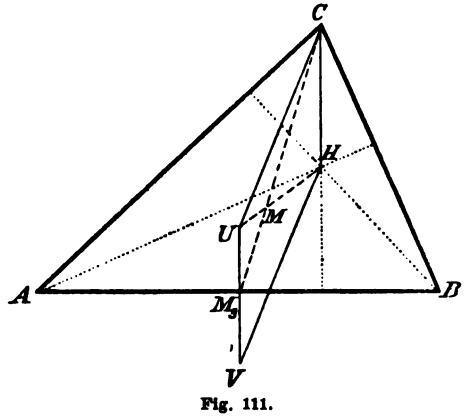


Fig. 111.

UH geht also durch M, den Schnittpunkt der Mittellinien des Dreiecks. Aber die Diagonale UH wird durch CM_3 so geteilt, daſs $UM = \frac{1}{2} HM$ ist (§ 23, 6), folglich ergiebt sich der Satz:

In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt der Höhen, der Schnittpunkt der Mittellinien und der Mittelpunkt des Umkreises in einer Geraden, und zwar ist der Abstand der beiden ersten Punkte doppelt so groſs wie der der beiden letzten.

4. Die drei Seitenmittelpunkte bestimmen mit jeder Ecke des Dreiecks ein Parallelogramm, folglich ist jede Mittellinie des Dreiecks ABC auch eine Mittellinie des Dreiecks $M_1M_2M_3$ (Fig. 112). Die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks ABC sind Höhen des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Der Feuerbachsche Kreis ist der Umkreis dieses Dreiecks, folglich liegt nach dem vorigen Satze sein Mittelpunkt F auf der Geraden UM, und zwar ist $FM = \frac{1}{2} UM$. In Worten:

In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt der Höhen, der Schnittpunkt der Mittellinien, der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Kreises der Seitenmittelpunkte in einer Geraden; und zwar ist der Abstand des ersten und des zweiten Punktes doppelt so grofs wie der des zweiten und des dritten, und dieser doppelt so grofs wie der Abstand des zweiten und des vierten Punktes.

5. Aus dem vorstehenden Satze ergiebt sich: $FH = FU$. Somit verbindet FH_1' in dem Dreieck AHU die Mittelpunkte zweier Seiten, also $FH_1' = \frac{1}{2}AU$ (Fig. 112). In Worten:

Der Radius des Feuerbachschen Kreises ist halb so grofs wie der Radius des Umkreises.

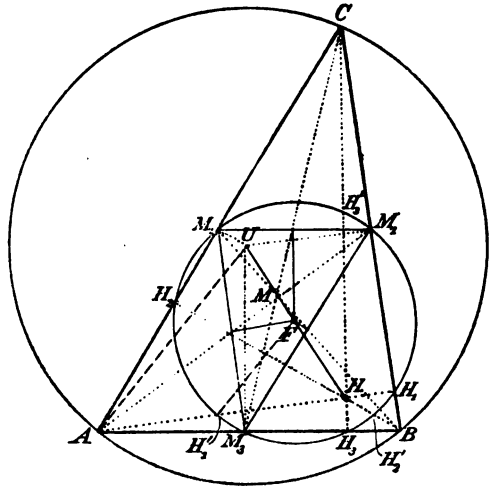


Fig. 112.

6. Ist P der Schnittpunkt der Mittellinie CM_3 mit dem Umkreise, und QR der zu UP parallele Durchmesser des Feuerbachschen Kreises (Fig. 113), so ist $UPQR$ ein Parallelogramm, und UF die Verbindungslinie einer Ecke mit

dem Mittelpunkte einer nicht zugehörigen Seite. UF wird also durch die Diagonale PR so geteilt, dafs der von U ausgehende Abschnitt doppelt so grofs wie der andere ist. Da nun $UM = 2MF$ ist, so geht jene Diagonale durch M; sie liegt also in der Geraden CM_3.

Die Diagonale PR wird auch durch UF so geteilt, dafs $PM = 2MR$ ist. Da aber $CM = 2MM_3$ ist, so folgt:

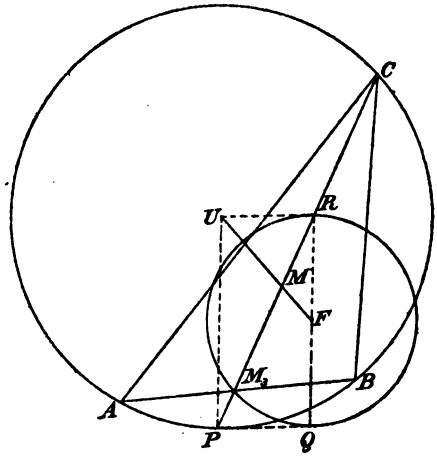


Fig. 113.

$CM + PM = 2(MR + MM_3)$ oder: $CP = 2RM_3$. In Worten:

Der Umkreis eines Dreiecks schneidet auf jeder Mittellinie eine Sehne aus, die doppelt so grofs ist wie die von dem Feuerbachschen Kreise auf derselben Mittellinie bestimmte Sehne.

Trägt man daher von dem Schnittpunkte der Mittellinien aus auf dem obern Abschnitte jeder Mittellinie die Hälfte der Strecke ab, die der Umkreis auf dem untern bestimmt, so gelangt man zu drei Punkten, die auf dem Feuerbachschen Kreise liegen. Somit können in jedem Dreiecke zwölf Punkte gefunden werden, die auf einem und demselben Kreise liegen.

7. Die Winkelhalbierende CW_3 schneidet die Mittelsenkrechte der Seite AB auf dem Umkreise in D. Anderer-

seits ist $AC_3 = BC' = s - b$, folglich $M_3C_3 = M_3C'$. Zieht man nun durch J die Parallele zu AB, und schneidet diese M_3U in X und K_3C_3 in Y, so folgt: $XJ = XY$. Somit ist in dem Dreieck JYK_3 die Gerade XD die Parallele zu einer Seite durch den Mittelpunkt einer zweiten, folglich $XD = \frac{1}{2}YK_3$, und $XD - \varrho = \frac{1}{2}YK_3 - \varrho$. Da aber $YK_3 = \varrho_3 + \varrho$ ist, so ergiebt sich: $XD - \varrho = M_3D = \frac{\varrho_3 - \varrho}{2}$, oder: $r - s_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho}{2}$. Ebenso findet man: $r - s_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$ und $r - s_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho}{2}$.

Die Winkelhalbierende CW_3' schneidet UM_3 in einem Punkte E des Umkreises. Da nun $BC_1 = AC_2 = s - c$ ist, so folgt: $M_3C_1 = M_3C_2$. In dem Trapezoid $C_2C_1K_1K_2$ ist demnach M_3E die zu den Schenkeln gehörige Mittellinie, also: $EM_3 = \frac{\varrho_2 + \varrho_1}{2}$ oder $r + s_3 = \frac{\varrho_2 + \varrho_1}{2}$ (§ 23, 20). In ähnlicher Weise erhält man: $r + s_1 = \frac{\varrho_3 + \varrho_2}{2}$ und $r + s_2 = \frac{\varrho_1 + \varrho_3}{2}$.

Durch Addition der für $r - s_3$ und $r + s_3$ erhaltenen Gleichungen folgt weiter:

$$2r = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho}{2}, \text{ oder: } 4r = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho.$$

Durch Subtraktion der genannten Gleichungen erhält man:

$$2s_3 = \frac{\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3}{2}, \text{ oder: } 4s_3 = \varrho + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3.$$

In ähnlicher Weise kann man ableiten:

$$4s_1 = \varrho - \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \text{ und: } 4s_2 = \varrho + \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3.$$

Die Addition der drei letzten Gleichungen ergiebt schliefslich: $4(s_1 + s_2 + s_3) = 3\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$ und, wenn für $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$ der Wert $4r + \varrho$ gesetzt wird:

$$s_1 + s_2 + s_3 = r + \varrho \text{ und: } AH + BH + CH = 2r + 2\varrho.$$

Somit ergeben sich die Sätze:

Die Summe der Radien der Ankreise eines Dreiecks übertrifft den Radius des Inkreises um den doppelten Durchmesser des Umkreises.

In jedem Dreieck ist die Summe der Mittelsenkrechten der Seiten gleich der Summe der Radien, und die Summe der drei obern Höhenabschnitte gleich der Summe der Durchmesser des In- und des Umkreises.

Übungen zu § 35.

1. Die Radien der Kreise, welche durch die Mittelpunkte von je drei Berührungskreisen eines Dreiecks bestimmt werden, sind dem Durchmesser des Umkreises gleich. (Der Umkreis ist der Feuerbachsche Kreis für jedes der Dreiecke, die durch drei Mittelpunkte von Berührungskreisen bestimmt werden. Siehe § 33, Übung Nr. 6).

2. Der Umkreis eines Dreiecks halbiert die Centralen der vier Berührungskreise.

3. Die Verbindungslinie einer Ecke eines Dreiecks mit dem Punkte, welcher zu dem Mittelpunkte des Umkreises bezüglich der Gegenseite jener Ecke symmetrisch liegt, geht durch den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises. (Siehe den Satz Nr. 3 des vorstehenden Paragraphen.)

4. Der Umkreis eines Dreiecks bestimmt auf jeder Höhe eine doppelt so grofse Sehne wie der Feuerbachsche Kreis. (Wenn man durch U die Parallele zu FH_3 zieht und diese Parallele h_3 in N schneidet, so ist $UN = 2FH_3$, also $UN = r$. Aufserdem: $HN = 2HH_3$ und $HC = 2HH_3'$.)

5. Die obern Abschnitte zweier Mittellinien eines Dreiecks bestimmen auf dem Feuerbachschen Kreise eine halb so grofse Sehne wie die Verlängerungen der untern Abschnitte auf dem Umkreise. (Siehe den Satz Nr. 6 des vorstehenden Paragraphen.)

6. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks sich um einen Rechten unterscheiden, so liegt der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf der gemeinschaftlichen Anseite jener Winkel. (Ist $\beta = R + \alpha$, so folgt: $\sphericalangle AHH_3 = 2R - \beta = R - \alpha = ACH_3$. Das Dreieck ACH ist also gleichschenkelig. Der Fufspunkt der Höhe h_3 fällt mit dem Mittelpunkte ihres obern Abschnittes zusammen, und die Höhe selbst berührt den Feuer-

bachschen Kreis in ihrem Fufspunkte. Somit ist die zugehörige Seite ein Durchmesser des Kreises.)

7. I. 1) H, U 2) H, M 3) H, F 4) U, M 5) U, F 6) M, F.
II. 1) C 2) H_3 3) H_3' 4) M_3.

8. I. 1) H_3, H_3'.
II. 1) U 2) M 3) M_1 4) H_2'.

9. I. 1) M_3, H_3'.
II. 1) C 2) A 3) U 4) H.

10. I. 1) C, H_3'.
II. 1) F 2) U 3) M 4) M_1 5) H_1'.

11. I. 1) s_3, β 2) b_1, β 3) $s_3 \pm b_1$, β.
II. 1) a 2) b 3) c 4) c_1 5) a_2 6) a_3 7) $b_1 - c_1$ 8) h_1 9) s_1 10) $s_1 + s_3$ 11) $s_3 - s_2$.

12. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn der Abstand der Mittelpunkte des Umkreises und des Feuerbachschen Kreises gegeben ist, und aufserdem: 1) r, $\beta - \alpha$ 2) r, s_3 3) r, m_3 4) $\beta - \alpha$, m_3 5) $\beta - \alpha$, s_3 6) s_3, m_3 7) h_3, s_3 8) $b_3 \pm a_3$, $\beta - \alpha$ 9) $b_3 \pm a_3$, r 10) $b_3 \pm a_3$, m_3 11) $b_3 \pm a_3$, s_3.

13. I. 1) $r + s_3$, $a + b$ 2) $\varrho_1 + \varrho_2$, $a + b$.
II. 1) γ 2) $\beta - \alpha$ 3) c 4) r 5) $r - s_3$ 6) ϱ_1 7) $\varrho_3 - \varrho$.

14. I. 1) $r + s_3$, $\beta - \alpha$ 2) $\varrho_1 + \varrho_2$, $\beta - \alpha$ 3) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$, $\beta - \alpha$ 4) $\varrho_1 + \varrho_2$, $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$ 5) $r + s_3$, $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$.
II. 1) γ 2) $\gamma - \alpha$ 3) c 4) $b + a$ 5) m_3 6) h_3 7) w_3 8) w_3' 9) $b_3 \pm a_3$ 10) ϱ_1 11) $\varrho_2 - \varrho_1$ 12) s_3 13) $r - s_3$ 14) $\varrho_3 - \varrho$ 15) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$.

15. I. 1) $r - s_3$, $b - a$ 2) $\varrho_3 - \varrho$, $b - a$.
II. 1) γ 2) $\beta - \alpha$ 3) c 4) s_3 5) $r + s_3$ 6) ϱ 7) $\varrho_3 + \varrho$.

16. I. 1) $r - s_3$, $\beta - \alpha$ 2) $\varrho_3 - \varrho$, $\beta - \alpha$ 3) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$, $\beta - \alpha$ 4) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$, $\varrho_3 - \varrho$ 5) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$, $r - s_3$.
II. 1) γ 2) $\beta - \gamma$ 3) c 4) $b - a$ 5) m_3 6) h_3 7) w_3 8) w_3' 9) $b_3 \pm a_3$ 10) ϱ 11) $\varrho_3 + \varrho$ 12) r 13) $r + s_3$ 14) $\varrho_1 + \varrho_2$ 15) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$.

Zwölftes Kapitel.

Die Vergleichung der Flächen.

§ 36. Die Hauptsätze der Flächenvergleichung.

1. Werden durch zwei Punkte eines Streifenrandes zwei Paare paralleler Querstrecken gelegt, so entstehen zwei Parallelogramme, die in der Grundlinie und der zugehörigen Höhe übereinstimmen; und zwar können zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem auf dem Rande der nicht gemeinschaftlichen Seiten die Ecken des einen Parallelogramms durch die des andern getrennt werden oder nicht (Fig. 114).

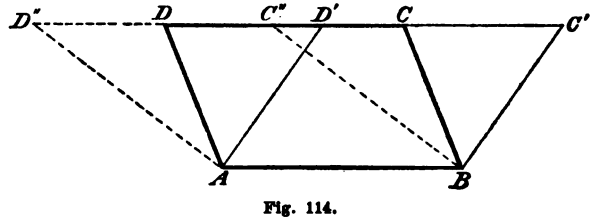


Fig. 114.

Im erstern Falle ist das Trapezoid $ABCD'$ ein Teil jedes der beiden Parallelogramme. Da ferner die Dreiecke BCC' und ADD' in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so ist $BCC' \cong ADD'$. Somit sind die Parallelogramme in ihren Teilen kongruent, d. h. gleich.

Im zweiten Falle kann man mit Hilfe eines Paares oder mehrerer Paare paralleler Querstrecken durch A und B eine Reihe von Parallelogrammen so zwischen die gegebenen einschieben, daſs je zwei benachbarte Parallelogramme der

Reihe, die gegebenen mitgerechnet, dieselbe gegenseitige Lage haben, wie die im ersten Falle betrachteten Parallelogramme.

Wenn zwei Dreiecke gleiche Grundlinien und gleiche zugehörige Höhen haben, so können sie als Hälften von Parallelogrammen aufgefaſst werden, die ebenfalls in der Grundlinie und der zugehörigen Höhe übereinstimmen. Somit erhalten wir den Satz:

Parallelogramme (Dreiecke) mit gleichen Grundlinien und gleichen zugehörigen Höhen sind gleich.

2. Zwei Parallelogramme, die gleiche Grundlinien, aber ungleiche zugehörige Höhen haben, können stets so gelegt werden, daſs sie eine Seite gemein haben und bezüglich dieser in derselben Halbebene liegen. Es seien $ABCD$ und $ABC'D'$ die beiden Parallelogramme in der neuen Lage.

Hat $ABC'D'$ die kleinere Höhe (Fig. 115), so zerlegt die Gerade $C'D'$ das Parallelogramm $ABCD$ in zwei neue,

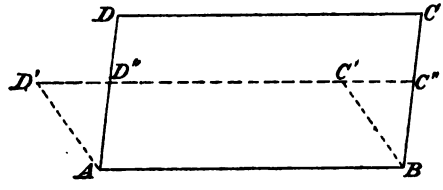


Fig. 115.

von denen das eine gleich $ABC'D'$ ist; folglich ist $ABC'D' < ABCD$. Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit ihm in der Grundlinie und in der zugehörigen Höhe übereinstimmt, so ergiebt sich auch, daſs von zwei Dreiecken, die in einer Seite übereinstimmen, dasjenige das gröſsere ist, welches die gröſsere zugehörige Höhe besitzt. Wird daher durch die Spitze C des Dreiecks ABC die Parallele zu AB gezogen, so ist die Gesamtheit der Punkte dieser Parallele identisch mit der Gesamtheit der Spitzen aller Dreiecke der Halbebene C, die mit dem Urdreieck in einer gemeinschaftlichen Seite und dem Flächeninhalte übereinstimmen. Daher der Satz:

Der Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die mit einem gegebenen die Grundlinie gemein haben und in dem Inhalte übereinstimmen, wird durch die bei-

den Parallelen gebildet, welche von der gegebenen Grundlinie einen Abstand haben, der der zugehörigen Höhe gleich ist.

3. Zieht man durch zwei Punkte P und Q der Seite AD des Parallelogramms $ABCD$ die Parallelen zu AB, so zerfällt $ABCD$ in gleiche oder ungleiche Teile, je nachdem die Seite AD durch P und Q in gleiche oder ungleiche Teile geteilt ist. Jedes Parallelogramm kann daher durch Parallelen zu einer Seite in eine vorgeschriebene Anzahl von gleichen Teilen zerlegt werden.

Sind P und Q Punkte der Seite AB des Dreiecks ABC, so zerfällt dieses durch die Geraden PC und QC in gleiche oder ungleiche Teile, je nachdem AB durch P und Q in gleiche oder ungleiche Teile geteilt wird. Jedes Dreieck kann daher von einer Ecke aus in eine vorgeschriebene Anzahl von gleichen Teilen geteilt werden.

4. Zieht man in dem Viereck $ABCD$ durch C die Parallele CE zu der Diagonale BD (Fig. 116), so haben die Dreiecke DBC und DBE die Seite DB gemein, und die

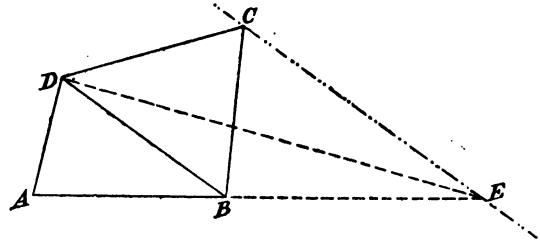


Fig. 116.

zugehörigen Höhen sind gleich; folglich ist $DBC = DBE$. Mithin auch $ABCD = ADE$. Jedes Viereck kann also in ein Dreieck verwandelt werden.

Ist $ABCD$ ein Trapezoid, so ist $BE = DC$ und $AE = AB + CD$. Daher der Satz:

Ein Trapezoid und ein Dreieck sind gleich, wenn sie in der Höhe übereinstimmen und die zugehörige Dreieckseite gleich der Summe der Grundlinien des Trapezoids ist.

Man sieht ohne weiteres ein, daſs jeder geradlinig begrenzte Teil der Ebene durch das beim Viereck angewendete Verfahren in ein Dreieck verwandelt werden kann.

5. Wenn man in einem Parallelogramm durch einen Punkt einer Diagonale die Parallelen zu den Seiten zieht, so zerfällt das gegebene Parallelogramm in vier andere. Zwei derselben werden durch jene Diagonale geschnitten, die beiden andern nicht (Fig. 117); letztere heiſsen Ergänzungsparallelogramme.

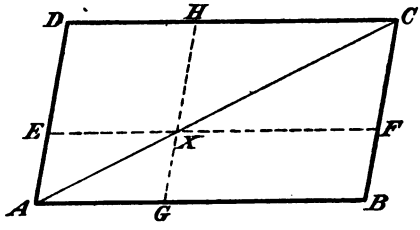


Fig. 117.

Da jedes Parallelogramm durch seine Diagonalen halbiert wird, so ist:

$$AXE + CXH = AXG + CXF,$$

und

$$ACD = ACB,$$

folglich auch:

$$ACD - (AXE + CXH) = ACB - (AXG + CXF),$$

oder:

$$EXHD = FXGB.$$

In Worten:

Ergänzungsparallelogramme sind gleich.

6. Zwei gleiche Parallelogramme, die in den Winkeln übereinstimmen, können stets so in zwei Scheitelwinkel gelegt werden, daſs sie eine Ecke gemein haben (Fig. 118). Sind $ABCD$ und $EFGB$ zwei solche Parallelogramme, so folgt ohne weiteres:

$$\begin{aligned} &ABCD + HBA \\ &+ BJC = EFGB \\ &+ HBE + BJG. \end{aligned}$$

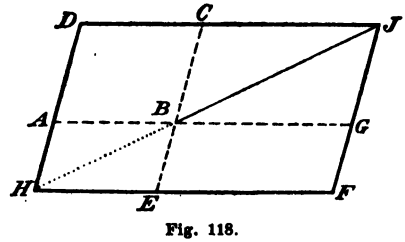


Fig. 118.

Ginge nun die Gerade HJ nicht durch B, so wäre das eine der beiden Dreiecke HJD und HJF um das

Dreieck HJB gröfser als die erste jener gleichen Summen, und um dasselbe Dreieck kleiner als die zweite. Da dies nicht möglich ist, geht HJ durch B, und es folgt der Satz:

Haben zwei gleiche Parallelogramme eine Ecke gemein, und liegt jedes in dem Scheitelwinkel eines Winkels des andern, so sind sie Ergänzungsparallelogramme.

Übungen zu § 36.

1. Jede Gerade, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms geht, teilt dieses in gleiche Trapezoide.

2. Die Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte teilen das Dreieck in vier, das Parallelogramm in acht gleiche Teile.

3. Die Verbindungslinien einer Ecke eines Parallelogramms mit den Mittelpunkten der nicht zugehörigen Seiten teilen das Parallelogramm in drei Teile, von denen der mittlere doppelt so groſs ist wie jeder der beiden andern.

4. Die obern Abschnitte der Mittellinien eines Dreiecks teilen dieses in drei gleiche Dreiecke, die untern Abschnitte teilen das Dreieck in drei gleiche Vierecke.

5. In jedem Trapezoid sind die Schenkeldiagonalendreiecke an derselben Grundlinie gleich.

6. Ein Dreieck oder irgend eine geradlinig begrenzte Fläche in ein Rechteck zu verwandeln.

7. Ein Parallelogramm $ABCD$ unter Beibehaltung der Seite AB in ein Parallelogramm $ABC'D'$ zu verwandeln, von dem man kennt:

1) a' 2) b' 3) h_2' 4) m_1' 5) e' 6) $\sphericalangle(ae')$ 7) $\sphericalangle(e'f')$ 8) $\sphericalangle(d'f')$ 9) $\sphericalangle(d'e')$.

8. Ein Dreieck ABC unter Beibehaltung der Seite AB in ein Dreieck ABC' zu verwandeln, von dem man kennt:

1) a' 2) γ' 3) a' 4) h_1' 5) m_1' 6) m_3' 7) $\sphericalangle(m_3'h_3')$ 8) $\sphericalangle(m_1'm_2')$ 9) $\sphericalangle(m_2'm_3')$ 10) s_3' 11) r' 12) a_3' 13) c_1' 14) $b_3' \pm a_3'$ 15) $\sphericalangle(m_1'a')$.

9. Ein Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels α in ein Dreieck $AB'C'$ zu verwandeln, von dem man kennt:

1) b' 2) h_3'.

10. Ein Parallelogramm in ein winkelgleiches Parallelogramm zu verwandeln, von dem eine Seite oder eine Höhe gegeben ist.

11. Ein Dreieck ABC zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck oder der Summe oder der Differenz von zwei gegebenen Dreiecken gleich ist, und von dem man kennt:

I. 1) c 2) h_3.

II. 1) a 2) γ 3) a 4) h_1 5) m_1 6) m_3 7) $\sphericalangle(m_1 m_2)$ 8) $\sphericalangle(m_2 m_3)$ 9) s_3 10) r 11) a_3 12) c_1 13) $b_3 \pm a_3$.

12. Unter Beibehaltung einer Seite soll ein Dreieck in ein anderes verwandelt werden, in welchem die Summe der beiden andern Seiten möglichst klein ist. (Siehe § 32, Übung No. 3.)

13. Unter Beibehaltung einer Höhe soll ein Dreieck in ein anderes von möglichst kleinem Umfang verwandelt werden. (Siehe die vorige Aufgabe.)

14. Ein Dreieck von einer Ecke aus in 2, 3, 4 gleiche Teile zu teilen.

15. Ein Parallelogramm von einer Ecke aus in 3, 5 gleiche Teile zu teilen.

16. Ein Dreieck oder ein Parallelogramm von einem Punkte einer Seite aus in 2, 3, 4 gleiche Teile zu teilen. (Man konstruiere zuerst ein gleiches Dreieck, welches eine Ecke in dem gegebenen Punkte hat.)

17. Ein Dreieck von einem gegebenen Punkte der Dreieckfläche aus in 2, 3 gleiche Teile zu teilen.

18. Ein Dreieck so in 3 gleiche Teile zu teilen, dafs eine Teilungslinie in einer gegebenen Geraden liegt.

19. Ein Trapezoid von einem Punkte einer Grundlinie aus in 3 gleiche Teile zu teilen.

§ 37. Flächenvergleichung beim rechtwinkeligen Dreieck.

1. Wenn man über der Höhe CD des rechtwinkeligen Dreiecks ABC das Quadrat $DEFC$ zeichnet (Fig. 119), durch den Schnittpunkt der Quadratseite EF und der Kathete CB die Parallele zur Hypotenuse zieht, und auf dieser in B

das Lot errichtet, so erhält man zwei gleiche Ergänzungsparallelogramme $DEHG = HJKF$. Addiert man zu jeder dieser Flächen das Rechteck $GHFC$, so erhält man: $DEFC = GJKC$.

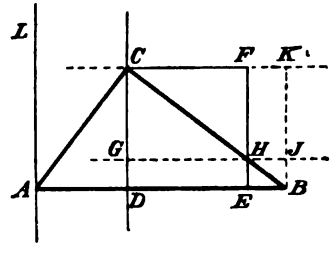


Fig. 119.

Die Streifen $AB|CK$ und $CD|EF$ bestimmen ein Quadrat und sind daher kongruent. Die Strecken AC und CH sind homologe Querstrecken jener Streifen, also einander gleich. Dieselben Strecken sind aber auch homologe Querstrecken der Streifen $CD|AL$ und $GJ|CK$; folglich sind auch diese Streifen kongruent, und ihre Breiten CG und AD einander gleich. Mithin ist das Rechteck $GJKC$ gleich dem Rechteck aus den Strecken AD und BD. Daher der Satz:

Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Kathetenprojektionen auf der Hypotenuse.

Auf Grund dieses Satzes kann ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat verwandelt werden.

2. Wird in dem Rechteck $ABCD$ die Diagonale AC durch die Halbierungslinie des Winkels δ in X geschnitten (Fig. 120), und zieht man durch X die Parallelen EF und GH

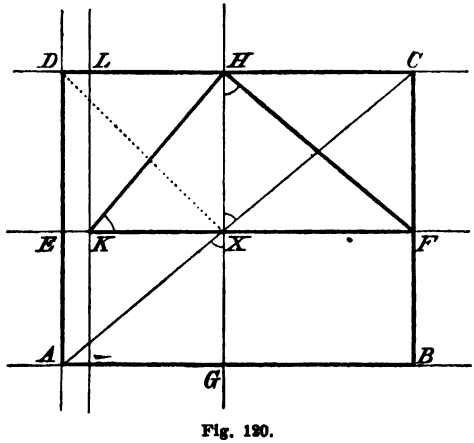


Fig. 120.

zu den Seiten, so sind das Quadrat $EXHD$ und das Rechteck $GBFX$ Ergänzungsparallelogramme, also einander gleich.

Steht nun HK auf HF senkrecht, so ist:

$$\sphericalangle AXG = HXC = XHF = R - KHX = HKX.$$

Somit sind HK und AX homologe Querstrecken der Streifen, welche das Quadrat $EXHD$ erzeugen; also $HK = AX$. Diese Strecken sind aber auch homologe

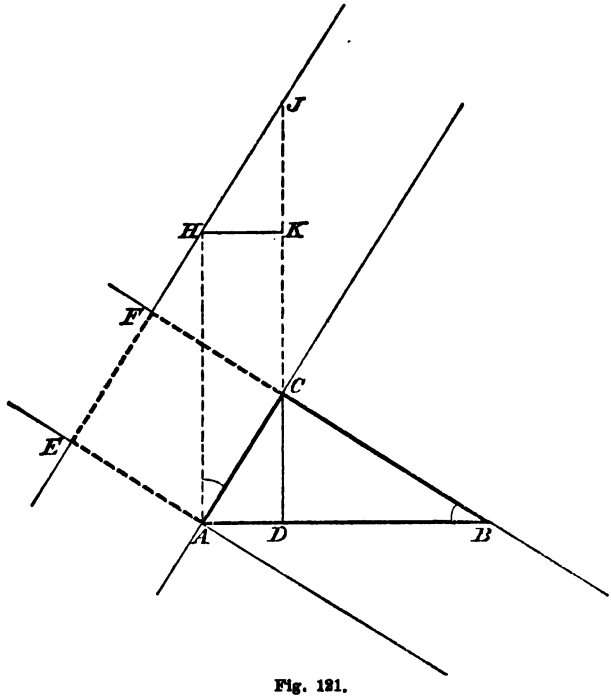


Fig. 121.

Querstrecken der Streifen $XH|KL$ und $AG|EX$; folglich sind diese Streifen kongruent, und ihre Breiten KX und GX einander gleich. Das Rechteck $GBFX$ ist also gleich dem Rechteck aus den Projektionen der Katheten HK und HF auf die Hypotenuse KF. Da nun die Figur auch hergestellt werden kann, wenn man von dem rechtwinkeligen Dreieck HKF ausgeht, so ergiebt sich wieder der vorige Satz über das Quadrat der Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks.

3. Wenn man über der Kathete AC des rechtwinkeligen Dreiecks ABC das Quadrat $ACFE$ zeichnet (Fig. 121), die Seite EF mit der Höhe CD in J und mit dem auf AB in A errichteten Lote in H zum Durchschnitt bringt und in H auf AH das Lot errichtet, so ist:

$$ACFE = ACJH = ADKH.$$

Da ferner die Winkel HAC und ABC denselben Komplementwinkel haben, so sind AH und AB homologe Querstrecken der Streifen, die das Quadrat $ACFE$ bestimmen; also $AH = AB$. Somit erhält man den Satz:

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus ihrer Projektion auf der Hypotenuse und der Hypotenuse.

Auf diesem Satze beruht eine zweite Art der Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat.

4. Derselbe Satz kann auch auf folgende Weise erhalten werden:

Man ziehe in dem Rechteck $ABCD$ (Fig. 122) durch den Schnittpunkt der Diagonale AC und der Halbierungslinie des

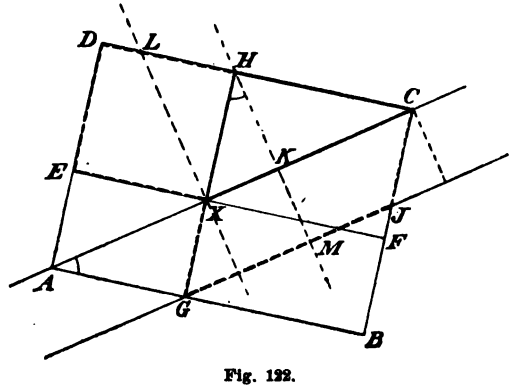


Fig. 122.

Winkels δ die Parallelen EF und GH zu den Seiten und durch G die Parallele GJ zu XC, so ist:

$$EXHD = GBFX = GJCX.$$

Ist HK die Höhe des rechtwinkeligen Dreiecks XCH und XL die Parallele zu HK durch X, so sind die gleichen

Strecken AG und XH homologe Querstrecken der Streifen $GJ|XC$ und $HK|XL$; diese Streifen sind also kongruent, und ihre Breiten KX und KM einander gleich. Somit ist das Parallelogramm $GJCX$ gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse XC des rechtwinkeligen Dreiecks XCH und der Projektion der Kathete XH auf der Hypotenuse.

5. Ist ABC ein rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 123), so zerlegt die Höhe CD das Hypotenusenquadrat in zwei

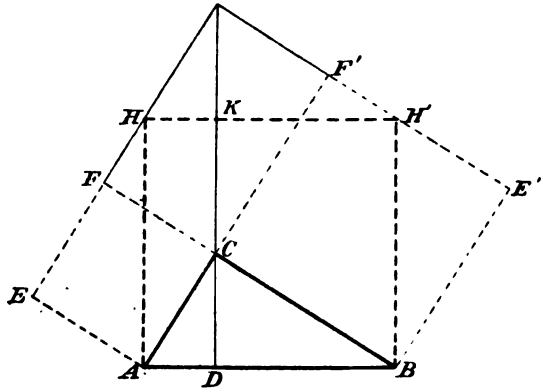


Fig. 123.

Rechtecke, die den Kathetenquadraten beziehungsweise gleich sind. Also folgt:

Die Summe der Kathetenquadrate eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Hypotenusenquadrat, oder: Jedes Kathetenquadrat ist gleich der Differenz zwischen dem Hypotenusenquadrat und dem andern Kathetenquadrat. (Lehrsatz des Pythagoras.)

Sowohl die Summe als auch die Differenz von zwei Quadraten kann daher wieder in Gestalt eines Quadrats dargestellt werden.

6. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei rechtwinkelige Dreiecke, die in den Winkeln übereinstimmen (Fig. 124), so sind in dem Trapezoid $ABA'B'$ die Schenkeldiagonalendreiecke

$CA'B$ und $CB'A$ einander gleich, mithin auch die Rechtecke $CA'PB$ und $CB'QA$.

Wenn man die Katheten CB und CB' (Fig. 125) um die zugehörigen Hypotenusen verlängert ($BD = AB$ und

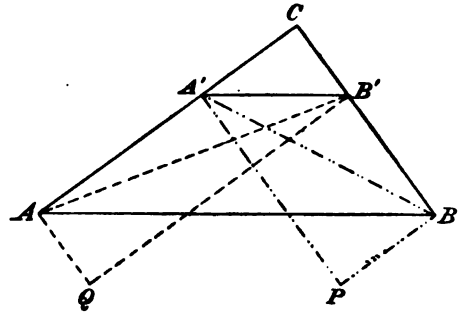


Fig. 124.

$B'D' = A'B'$), so stimmen auch die rechtwinkeligen Dreiecke CAD und $CA'D'$ in den Winkeln überein, und es ist wieder: $CA'P'D = CD'Q'A$. Aus beiden Paaren von

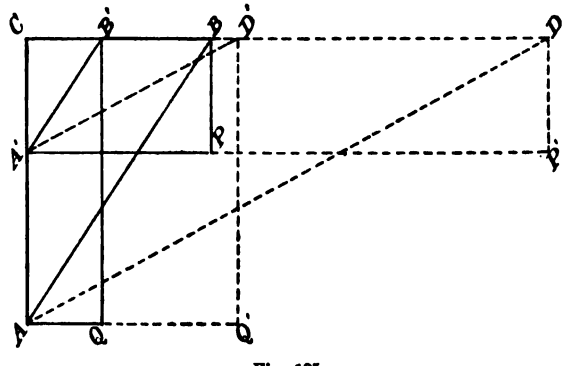


Fig. 125.

gleichen Rechtecken folgt aber: $BPP'D = B'QQ'D'$, und zwar ist in jedem dieser Rechtecke die eine Seite gleich der Hypotenuse eines der gegebenen Dreiecke.

Wenn zwei Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen, so heifsen je zwei Seiten beider Dreiecke, die gleichen

Winkeln gegenüberliegen, homolog. Unter Anwendung dieses Begriffes kann daher der Satz ausgesprochen werden:

In winkelgleichen rechtwinkeligen Dreiecken ist das Rechteck aus zwei nicht homologen Seiten beider Dreiecke gleich dem Rechteck aus den Seiten, die zu jenen homolog sind.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie unter Benutzung dieses Satzes das Rechteck $CAQB'$ in ein Rechteck von vorgeschriebener Seite CA' verwandelt werden kann.

Übungen zu § 37.

1. Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von dem eine Seite gegeben ist.

2. Eine gegebene geradlinig begrenzte Fläche in ein Quadrat zu verwandeln.

3. Die Summe von zwei oder drei gegebenen Quadraten in ein Quadrat zu verwandeln.

4. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich der Differenz von zwei gegebenen Quadraten ist.

5. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe oder der Differenz von zwei gegebenen geradlinig begrenzten Flächen ist.

6. Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich dem Überschufs von zwei gegebenen geradlinig begrenzten Flächen über eine dritte ist.

7. In winkelgleichen rechtwinkeligen Dreiecken ist das Rechteck aus der Höhe des einen und einer Seite des andern gleich dem Rechteck aus der homologen Seite des ersten und der Höhe des zweiten Dreiecks.

§ 38. Das Rechnen mit Flächen.

1. Wenn man durch den Punkt X auf der Diagonale des Quadrats $ABCD$ die Parallelen EF und GH zu den Seiten zieht (Fig. 126), so zerfällt $ABCD$ in zwei Quadrate und zwei Rechtecke, welche letztere als Ergänzungsparallelogramme gleich sind.

Da $ABCD$ als das Quadrat über der Summe der Strecken AG und BG, und $AGXE$ als das Quadrat über der Differenz der Strecken AB und BG betrachtet werden kann, so ergeben sich aus der Figur die Sätze:

Das Quadrat über der Summe zweier Strecken ist um ihr doppeltes Rechteck gröfser als die Summe ihrer Quadrate.

Das Quadrat über der Differenz zweier Strecken ist um ihr doppeltes Rechteck kleiner als die Summe ihrer Quadrate.

Aus der vorigen Figur ergiebt sich weiter: $ABCD - AGXE = GBCX + EDCX$.

Wird das Trapezoid $GBXC$ um die Quadratdiagonale FH, die Mittelsenkrechte von XC, umgeklappt, so verwandelt sich die Summe der Trapezoide $GBCX + EDCX$ in ein Rechteck, dessen eine Seite gleich $DC + GX$, und dessen andere Seite gleich DE oder $DA - EA$ ist. Folglich ergiebt sich der Satz:

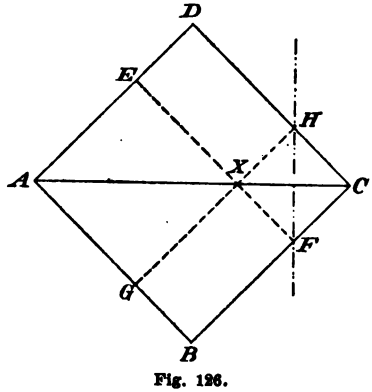


Fig. 126.

Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Rechteck aus der Summe und der Differenz ihrer Seiten.

2. Die vorstehenden Sätze erinnern an gleichlautende Sätze der Algebra und legen es daher nahe, für die Fläche eines Rechtecks aus den Seiten a und b die Bezeichnung $a \cdot b$ oder ab, für die eines Quadrats über der Seite a die Bezeichnung a^2 einzuführen. Dabei ist aber wieder festzuhalten, dafs hier die Buchstaben Strecken, in der Algebra Zahlen bedeuten. Unter Benutzung dieser Schreibweise kann man obige Sätze in folgenden Gleichungen aussprechen:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; 2) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Wendet man die neue Schreibweise auf Parallelogramme, Dreiecke und Trapezoide an, so erhält man für den Flächeninhalt eines Parallelogramms einen der zwei Ausdrücke: ah_1 oder bh_2 für den Inhalt eines Dreiecks:

$$\frac{1}{2}\,ah_1, \text{ oder } \frac{1}{2}\,bh_2, \text{ oder } \frac{1}{2}\,ch_3;$$

für den Inhalt eines Trapezoids: $\frac{1}{2}(a + c)h$.

3. Teilt man das Rechteck $ABCD$ (Fig. 127) durch eine Parallele EF zu AB, und setzt man $AE = a$, $DE = b$, $AB = x$, so erhält man:

$$(a + b)\,x = ax + bx.$$

Setzt man $AD = a$, $DE = b$, $AB = x$, so ergiebt sich:

$$(a - b)\,x = ax - bx.$$

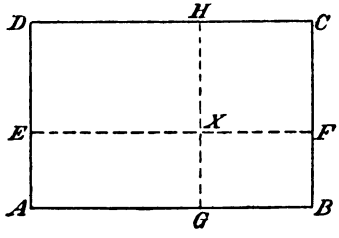


Fig. 127.

Zieht man eine Parallele GH zu AD, und setzt man: $AE = a$, $DE = b$, $AG = x$, $BG = y$, so lehrt die Figur:

$$(a + b)\,(x + y) = ax + bx + ay + by.$$

Setzt man dagegen: $AD = a$, $DE = b$, $AB = x$, $BG = y$, so erhält man:

$$(a - b)\,(x - y) + ay + bx = ax + by,$$

oder: $$(a - b)\,(x - y) = ax + by - ay - bx.$$

4. Wenn die gleichen Rechtecke $ABCD$ und $AEGF$ den Winkel GAB gemein haben (Fig. 128), so ergiebt sich:

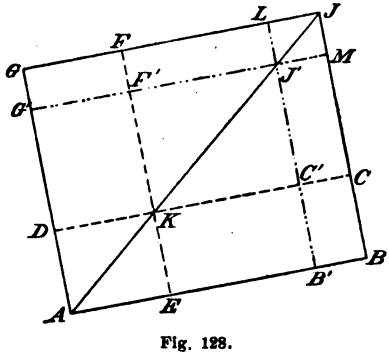


Fig. 128.

$EBCK = DKFG$; folglich sind diese Rechtecke Ergänzungsparallelogramme. Die Gerade AK geht also durch die vierte Ecke J des durch die Punkte A, B und G bestimmten Rechtecks.

Sind auch die Rechtecke $AB'C'D$ und $AEF'G'$ gleich, so ergiebt sich in ähnlicher Weise, dafs die Gerade AK durch die vierte Ecke J' des Rechtecks geht, dessen drei erste Ecken die Punkte A, B' und G' sind. Somit sind auch die Rechtecke $B'BMJ'$ und $GJ'LG'$ als Ergänzungsparallelogramme einander gleich. Addiert man zu jeder dieser Flächen das Rechteck $AB'J'G'$, so folgt schliefslich: $ABMG' = AB'LG$.

Setzt man: $AB = a$, $AD = x$, $AE = y$, $AG = b$, $AB' = a'$, $AG' = b'$, so lautet die Voraussetzung der vorstehenden Betrachtung: $ax = by$ und $a'x = b'y$, und die Folgerung: $ab' = ba'$. Vergleicht man die letzte Gleichung mit den beiden ersten, so ergiebt sich, dafs sie nach den Regeln der Algebra aus ihnen abgeleitet werden kann.

Ist weiter: $ax = by$ und $a'x' = b'y'$, aber auch: $aa' = bb'$, so ergiebt sich zunächst aus der ersten und der dritten Gleichung: $b'x = a'y$, dann aus dieser und der zweiten: $xx' = yy'$. Die letzte Gleichung kann aber unter Berücksichtigung der dritten Gleichung aus den beiden ersten nach den Regeln der Algebra abgeleitet werden.

5. Die in Nr. 3 und Nr. 4 angestellten Betrachtungen lehren, dafs auf die Ausdrücke, die Flächen bezeichnen, und auf die Gleichungen, die für Flächen aufgestellt werden können, die Regeln der Algebra anwendbar sind: die Flächen sind als Produkte, die Seiten als Faktoren dieser Produkte zu behandeln.

In der Algebra kann jede der Gleichungen $ax = bc$ und $x = \frac{bc}{a}$ für die andere eintreten. Nichts hindert uns, sie auch in der Geometrie als gleichbedeutend zu betrachten, wenn unter a, b und c Strecken verstanden werden. In andern Worten: die Strecke, die mit der Strecke a ein Rechteck bestimmt, welches gleich bc ist, soll durch $\frac{bc}{a}$ bezeichnet werden.

Der Quotient aus einer Fläche und einer Strecke mufs demnach als eine Strecke betrachtet werden.

Es soll nun noch gezeigt werden, in welcher Weise die erweiterte geometrische Zeichensprache zum Beweise von Sätzen und zur Lösung von Aufgaben Verwendung finden kann.

6. Werden zwei winkelgleiche Dreiecke so aufeinander gelegt, daſs sie einen Winkel gemein haben, so zerfallen sie durch die gemeinschaftliche Höhe in zwei Paare von rechtwinkeligen Dreiecken, die in den Winkeln übereinstimmen, und es ergiebt sich nach § 37, 6: $h_3 a' = a h_3'$ und $h_3 b' = b h_3'$, woraus folgt: $ab' = ba'$. In Worten:

In winkelgleichen Dreiecken ist das Rechteck aus zwei nicht homologen Seiten beider Dreiecke gleich dem Rechteck aus den Seiten, die zu jenen homolog sind.

Aus diesem Satze ergiebt sich wieder eine Konstruktion für die Seite eines Rechtecks, von dem der Flächeninhalt in Gestalt eines Rechtecks und eine Seite vorgeschrieben sind.

7. Die bisherigen Sätze lehren die Lösung der Aufgabe: Die Summe oder die Differenz von zwei gegebenen Quadraten oder Rechtecken oder eines Quadrats und eines Rechtecks in ein Quadrat zu verwandeln. Die umgekehrte Aufgabe, ein gegebenes Quadrat in die Summe oder in die Differenz von zwei Quadraten oder von zwei Rechtecken oder von einem Quadrat und einem Rechteck zu zerlegen, besitzt unendlich viele Lösungen. Sie wird bestimmt, wenn noch weitere Bedingungen gestellt werden, z. B.: Ein gegebenes Quadrat in die Summe eines Quadrats und eines Rechtecks zu zerlegen, wenn von dem Rechteck eine Seite gegeben, und die nicht gegebene Seite gleich der Seite des Quadrats ist.

Wenn man die gesuchte Quadratseite mit x, die gegebene Rechteckseite mit b, die Seite des gegebenen Quadrats mit a bezeichnet, so kann die Aufgabe in folgender Gleichung ausgesprochen werden:

$$x^2 + bx = a^2.$$

Da bx als das doppelte Rechteck aus den Seiten $\frac{b}{2}$ und x aufgefaſst werden kann, so genügt es, auf jeder Seite der Gleichung $\frac{b^2}{4}$ zu addieren, um auf der linken Seite das Quadrat einer Summe zu erhalten:

$$x^2 + 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} = a^2 + \frac{b^2}{4}, \text{ oder: } \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Die letzte Gleichung lehrt, daſs x um $\frac{b}{2}$ kleiner ist als die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{b}{2}$ sind. Die Strecke x ist also konstruierbar.

Ist $a = b$, so geht die erste Gleichung in die folgende über:

$$x^2 = a(a - x).$$

Da nun $(a - x) + x = a$ ist, so ist in diesem Falle die Aufgabe mit der folgenden identisch: Eine gegebene Strecke so zu teilen, daſs das Quadrat über dem einen Abschnitt gleich dem Rechteck aus dem andern Teile und der gegebenen Strecke ist. Diese Teilung ist unter dem Namen des goldenen Schnittes bekannt.

8. Soll ein gegebenes Quadrat in die Differenz aus einem Quadrat und einem Rechteck zerlegt werden, wenn wieder eine Rechteckseite gegeben, und die andere der Seite des gesuchten Quadrats gleich sein soll, so erhält man die Gleichung:

$$x^2 - bx = a^2.$$

Somit ergiebt sich wieder:

$$x^2 - 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Die linke Seite der Gleichung ist entweder durch $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2$ oder durch $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$ zu ersetzen. Da nun das Quadrat über einer Strecke, die kleiner als $\frac{b}{2}$ ist, selbst kleiner als das Quadrat über $\frac{b}{2}$, d. h. kleiner als $\frac{b^2}{4}$ sein muſs, so ist es unzulässig, den Ausdruck $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$ einzusetzen; mithin ergiebt sich: $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$. Die gesuchte Strecke ist also um $\frac{b}{2}$ gröſser als die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{b}{2}$ sind.

Ist $a = b$, so geht die Aufgabe in folgende über: $x^2 = a(a + x)$; in Worten: Eine gegebene Strecke so zu verlängern, daſs das Quadrat über der Verlängerung gleich dem Rechteck aus der gegebenen Strecke und der durch die Verlängerung erhaltenen wird.

9. Soll das Quadrat von der Seite a unter den vorigen Bedingungen in die Differenz aus einem Rechteck und einem Quadrat zerlegt werden, so führt die Aufgabe zu der Gleichung:

$$bx - x^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad a^2 + x^2 - bx = 0.$$

Wie früher ergiebt sich hieraus die folgende:

$$a^2 + \left(x^2 - 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{b^2}{4}.$$

Man erkennt aber sofort, daſs die Aufgabe nur möglich ist, wenn $a^2 < \frac{b^2}{4}$, oder $a < \frac{b}{2}$ ist. Erfüllen die gegebenen Gröſsen a und b diese Bedingung, so kann für das zweite Glied der linken Seite entweder $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2$ oder $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$ eingesetzt werden, und man erhält entweder:

$$a^2 + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}, \quad \text{oder:} \quad a^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \frac{b^2}{4}.$$

Die gesuchte Quadratseite ist also entweder um $\frac{b}{2}$ gröſser als die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich $\frac{b}{2}$, und dessen andere Kathete gleich a ist, oder die gesuchte Quadratseite ist um jene Kathete kleiner als $\frac{b}{2}$.

10. In der Algebra kann jede der beiden Gleichungen $x^2 = ab$ und $x = \sqrt{ab}$ für die andere eintreten. Ebenso wie in der Algebra für die zweite Potenz einer Zahl die Bezeichnung Quadrat gebraucht wird, so kann auch umgekehrt der algebraische Begriff der Wurzel in die Geometrie übernommen werden. Man bezeichnet nämlich als die Quadratwurzel einer Fläche die Seite des Quadrats, welches der

Fläche gleich ist. Unter Anwendung dieses Begriffes können die Schlufsgleichungen von Nr. 7, 8, 9 in folgender Form ausgedrückt werden:

1) $x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$ oder: $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$

2) $x - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$ oder: $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a^2}$

3) $x - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}$ oder: $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}$

$\frac{b}{2} - x = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}$ oder: $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}$.

Vergleicht man diese Gleichungen mit den ursprünglichen:

1) $x^2 + bx - a^2 = 0$

2) $x^2 - bx - a^2 = 0$

3) $x^2 - bx + a^2 = 0$,

so ergiebt sich der Schlufs, dafs man allgemein aus der Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0,$$

für x einen der beiden Werte, bezw. die beiden Werte:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

erhält.

Die früher gefundene Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe drückt aus, dafs unter dem Wurzelzeichen der Minuend gröfser als der Subtrahend ist.

Weiter ergiebt sich für die algebraische Behandlung geometrischer Aufgaben die Regel: Man betrachte als Unbekannte der Aufgabe die Strecke oder die Strecken, auf deren Konstruktion die Lösung der Aufgabe zurückgeführt werden kann, stelle auf Grund der Bedingungen der Aufgabe oder bekannter geometrischer Lehrsätze Gleichungen auf und leite aus den Lösungen der Gleichungen die geometrische Konstruktion der Unbekannten ab.

Übungen zu § 38.

1. Werden auf den Seiten des Quadrats $ABCD$ (oder auf den Verlängerungen der Seiten) die Punkte $A'B'C'D'$ so angenommen, daſs $AA' = BB' = CC' = DD' = a$ und $BA' = CB' = DC' = AD' = b$ ist, so ergiebt sich: $\overline{A'B'}^2 = a^2 + b^2$. Wie lautet der in dieser Gleichung enthaltene Satz?

2. In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist: $a^2 = ca_3$, $b^2 = cb_3$, $a^2 + b^2 = c^2$, $h_3^2 = a_3 b_3$. Wie lauten diese Gleichungen in Worten?

3. Welche Gleichung drückt die Beziehung 1) zwischen dem Quadrat über der Diagonale eines Quadrats und dem Quadrat selbst, 2) zwischen dem Quadrat über der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks und dem Dreieck selbst aus?

4. Die Strecke x auf Grund folgender Gleichungen zu zeichnen:

1) $x^2 = a^2 + b^2$ 2) $x^2 = a^2 - b^2$ 3) $x = \frac{ab}{c}$ 4) $x = \frac{b^2}{a}$

5) $x^2 = 2a^2$ 6) $x^2 = \frac{a^2}{2}$ 7) $x^2 = \frac{ab}{5}$ 8) $x^2 = \frac{3a^2}{4}$

9) $x^2 = \frac{5ab}{8}$ 10) $x = \frac{3ab}{2c}$ 11) $x^2 = 13a^2 + b^2$

12) $x^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2}$ 13) $x = \frac{5b^2}{2a} + \frac{3ab}{4c}$.

(Bei den Nrn. 3, 4, 10, 13 führe man die in Nr. 6 des vorstehenden Paragraphen angedeutete Konstruktion aus.)

5. Welche geometrische Bedeutung haben folgende Ausdrücke:

1) $\frac{a^2 + b^2}{c}$ 2) $\frac{a^2 - b^2}{c}$ 3) $\frac{a^2 b}{c}$ 4) $\frac{abc}{d}$ 5) $\frac{abcd}{ef}$

6) $\sqrt{ab - cd}$ 7) $\sqrt{\frac{a(b^2 + c^2)}{d}}$ 8) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

9) $\sqrt{a^2 - bc}$ 10) $a\sqrt{bc}$ 11) $\sqrt{a\sqrt{bc}}$ 12) $\sqrt{a\sqrt{b^2 + c^2}}$?

6. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem der Inhalt i in Gestalt eines Quadrats oder eines Rechtecks gegeben ist, wenn aufserdem bekannt sind:

I. 1) c 2) h_3.

II. 1) a 2) γ 3) a 4) h_1 5) m_1 6) m_3 7) $\sphericalangle(m_3 h_3)$ 8) $\sphericalangle(m_1 m_3)$ 9) $\sphericalangle(m_2 m_3)$ 10) s_3 11) r 12) a_3 13) c_1 14) $b_3 \pm a_3$ 15) $\sphericalangle(m_1 a)$.

(Durch den Inhalt und eine Seite wird die zugehörige Höhe bestimmt.)

7. Wenn zwei gleiche Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen, so bestimmen seine Anseiten in dem einen Dreieck ein ebenso grofses Rechteck wie in dem andern. (Wenn die Dreiecke so gelegt werden, dafs sie den Winkel gemein haben, so sind sie Schenkeldiagonalendreiecke eines Trapezoids; mithin weist die Figur winkelgleiche Dreiecke auf. Siehe Nr. 6 des vorstehenden Paragraphen.)

8. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln. (Man verwandle es zuerst in ein Dreieck, in dem der eine Winkel gleich $\frac{2}{3} R$ ist, das erhaltene unter Benutzung von Nr. 7 in ein gleichschenkeliges, in dem jener Winkel der Winkel an der Spitze ist.)

9. Ein Parallelogramm in einen Rhombus, dessen Winkel gegeben sind, zu verwandeln.

10. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, und sind die eingeschlossenen Winkel Supplementwinkel, so sind die Dreiecke gleich. (Man denke an ein Dreieck, welches durch eine Mittellinie geteilt ist.)

11. Wenn zwei Winkel von gleichen Dreiecken Supplementwinkel sind, so bestimmen die Anseiten des einen Winkels ein ebenso grofses Rechteck wie die des andern.

12. Unter Beibehaltung eines Winkels soll ein Dreieck so in ein anderes verwandelt werden, dafs entweder 1) von den Anseiten jenes Winkels die eine zwei- oder dreimal so grofs wie die andere wird, oder 2) der dritte Teil der einen Anseite gleich dem vierten Teile der andern wird.

13. Unter Beibehaltung eines Winkels ein Dreieck so in ein anderes zu verwandeln, daſs in dem neuen Dreieck die Summe (die Differenz) der Anseiten jenes Winkels einer gegebenen Strecke gleich wird. Wie muſs die gegebene Strecke gewählt werden, damit die Aufgabe möglich sei? (Siehe die Schluſsbemerkung in Nr. 10 des vorstehenden Paragraphen.)

14. Unter Beibehaltung eines Winkels ein Dreieck so in ein anderes zu verwandeln, daſs in dem neuen Dreieck die Summe der Anseiten jenes Winkels möglichst klein wird. (Siehe die vorige Aufgabe.)

15. Über einer gegebenen Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck so zu zeichnen, daſs auf der Hypotenuse die Projektion der einen Kathete das $2\frac{1}{4}$-fache der andern Kathete beträgt.

16. In welcher Beziehung stehen die Kathetenquadrate zueinander, wenn auf der Hypotenuse die Projektion der einen Kathete 2-, 3-, 4mal so groſs ist wie die der andern?

17. Ein rechtwinkeliges Dreieck von gegebener Höhe zu zeichnen, in dem die Differenz der Kathetenprojektionen auf der Hypotenuse einer gegebenen Strecke gleich ist.

18. Ein rechtwinkeliges Dreieck von gegebener Hypotenuse zu zeichnen, in welchem das Quadrat über der Höhe dem Flächeninhalte des Dreiecks gleich ist.

19. Einem gegebenen Kreise 1) ein rechtwinkeliges Dreieck von gegebenem Inhalte, 2) ein Rechteck von gegebenem Inhalte einzuschreiben.

20. Ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe (der Differenz) der Katheten und dem Inhalte zu zeichnen.

21. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, in dem die zu einer Kathete gehörige Mittellinie und die Differenz der Kathetenprojektionen auf der Hypotenuse gegeben sind.

22. Ein gleichschenkeliges Dreieck 1) aus dem Umfang und der Höhe zur Grundlinie, 2) aus dem Umfang und dem Inhalte zu zeichnen.

23. Vier gleiche Kreise zu zeichnen, die einen gegebenen Kreis gleichartig berühren, und von denen jeder zwei der übrigen Kreise berührt.

24. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks aus der Höhe und dem Ankreise der Hypotenuse zu bestimmen.

25. Ein Quadrat zu zeichnen, von dem zwei Ecken auf einem Durchmesser, die beiden andern auf dem Umfang eines gegebenen Kreises liegen.

26. Ein Rechteck von gegebenem Inhalte zu zeichnen, von dem zwei Ecken auf einem Durchmesser, die beiden andern auf dem Umfang eines gegebenen Kreises liegen. Welches ist das gröfste Rechteck, das in der angegebenen Weise einem gegebenen Halbkreise eingeschrieben werden kann? (Siehe die Schlufsbemerkung in Nr. 10 des vorstehenden Paragraphen.)

27. Ein Rechteck zu zeichnen, welches gleich der Hälfte eines gegebenen Rechtecks ist, und dessen Seiten mit denen des gegebenen einen Rahmen bestimmen, der überall dieselbe Breite hat. (Die Breite ist zu berechnen und geometrisch zu konstruieren.)

28. Ein gegebenes rechtwinkeliges Dreieck durch ein Lot zu einer Kathete zu halbieren. (Man stelle Gleichungen für die Katheten des neuen Dreiecks auf.)

29. Von einem gegebenen Dreieck durch ein Lot zu einer Seite die Hälfte oder den dritten Teil abzuschneiden. (Das gesuchte Lot und die zu ihm parallele Höhe bestimmen winkelgleiche Dreiecke.)

30. Alle Dreiecke, die eine Seite gemein haben, und deren nicht gemeinschaftliche Ecken auf demselben Lote zur gemeinschaftlichen Seite liegen, können durch eine einzige Gerade halbiert werden. (Der Beweis ergiebt sich aus der vorhergehenden Aufgabe.)

31. Durch eine Gerade, welche die beiden Katheten schneidet, soll ein gegebenes rechtwinkeliges Dreieck in zwei Teile zerlegt werden, die gleiche Umfänge und gleiche Inhalte haben. (Der Inhalt des neuen Dreiecks ist vorgeschrieben.)

32. Ein gegebenes Rechteck in ein anderes von gegebener Diagonale zu verwandeln. Ist die Aufgabe stets möglich?

33. Werden die Ecken eines Dreiecks mit dem Mittelpunkte desselben Berührungskreises verbunden, so ergiebt sich, dafs der Inhalt i des gegebenen Dreiecks auf folgende vier Arten ausgedrückt werden kann:

$$i = \varrho s = \varrho_1 (s - a) = \varrho_2 (s - b) = \varrho_3 (s - c).$$

34. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem der Inhalt in Gestalt eines Rechtecks oder eines Quadrats vorgeschrieben ist, wenn aufserdem gegeben sind:

I. 1) ϱ 2) ϱ_1.

II. 1) a 2) β 3) a 4) $b+c$ 5) h_1 6) ϱ_2.

35. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1) $a-b$, h_3, ϱ_1 2) $a+b$, h_3, ϱ_3 3) $a+b$, h_3, ϱ 4) $2s$, h_3, ϱ 5) c, h_3, ϱ 6) c, h_3, $a+b$.

36. Auf einer gegebenen Strecke a und auf ihrer Verlängerung je einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von den Endpunkten der Strecke mit zwei andern gegebenen Strecken p und q beziehungsweise gleiche Rechtecke bestimmen. (Man berechne die Abstände des gesuchten Punktes von den Endpunkten der gegebenen Strecke. Oder auch: Die Abstände des gesuchten Punktes von den Endpunkten der gegebenen Strecke können als homologe Seiten von winkelgleichen Dreiecken aufgefafst werden, für die der gesuchte Punkt eine gemeinschaftliche Ecke ist, und in welchen die Strecken p und q ein zweites Paar homologer Seiten bilden.)

§ 39. Flächenvergleichung beim schiefwinkeligen Dreieck.

1. Zieht man in dem Rechteck $ABCD$ durch den Punkt X der Diagonale AC die Parallelen EF und GH zu den Seiten (Fig. 129), so ist: $GBFX = EXHD$.

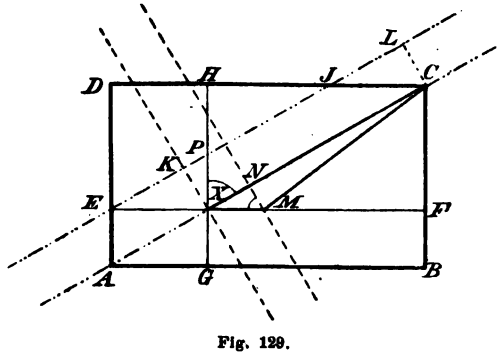


Fig. 129.

Wenn EJ parallel zu AC, XK und CL senkrecht zu AC gezogen werden, so ergiebt sich:

$$EXHD = EXCJ = XCLK.$$

Ist weiter $XM = XG = AE$, und MN senkrecht zu XC, so sind in den Streifen $XK\,MN$ und $AC\,EL$ die Querstrecken XM und XP oder AE homolog und gleich, die genannten Streifen also kongruent, und ihre Breiten XN und XK einander gleich. Die gleichen Rechtecke $XCLK$ und $GBFX$ haben somit als Seiten die Strecken XC und $XG = XM$ und deren Projektionen XF und $XK = XN$ für den eingeschlossenen Winkel. Da die Figur offenbar auch hergestellt werden kann, wenn man von den Strecken XM und XC und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel CXM ausgeht, und die Strecken XC und XM auf den Schenkeln des Winkels CXM verschoben werden können, ohne dafs ihre Projektionen sich ändern, so ergiebt sich der Satz:

Zwei Strecken, die auf verschiedenen Geraden liegen, bilden gleiche Rechtecke, jede mit der Projektion der andern für den eingeschlossenen Winkel.

Da durch die Strecken XM und XC und den eingeschlossenen Winkel das Dreieck CMX bestimmt wird, so kann der Satz auch folgendermafsen ausgesprochen werden:

Zwei Seiten eines Dreiecks bestimmen gleiche Rechtecke, jede mit der auf ihr liegenden Projektion der andern.

2. Werden zu den Seiten AC und BC des Dreiecks ABC die Höhen konstruiert, so liegen die Fufspunkte H_1 uud H_2 auf den Seiten selbst oder auf deren Verlängerungen, je nachdem der eingeschlossene Dreieckswinkel γ spitz oder stumpf ist (Fig. 130 u. 131).

Jede der beiden Seiten AC und BC bestimmt mit den auf ihr liegenden Projektionen der beiden andern Dreieckseiten zwei Rechtecke, deren Summe oder Differenz gleich dem Quadrat über der betrachteten Seite ist, je nachdem $\gamma < R$ oder $\gamma > R$ ist. Konstruiert man auch über der dritten Seite die Rechtecke aus ihr und jeder der auf ihr liegenden Projektionen, und bezeichnet man von den sechs Rechtecken diejenigen als benachbart, die eine Ecke des

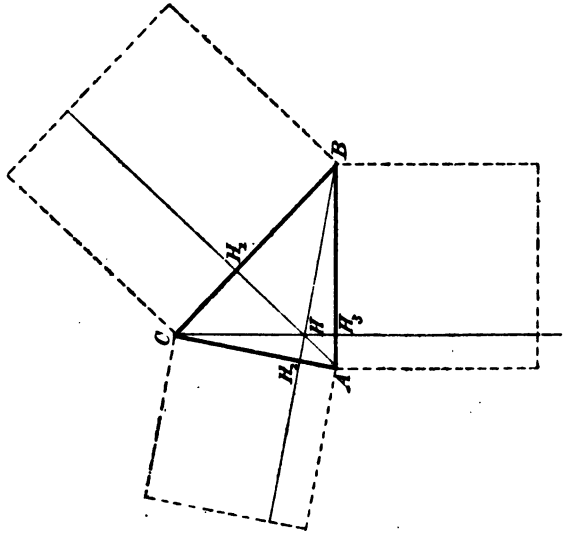


Fig. 130.

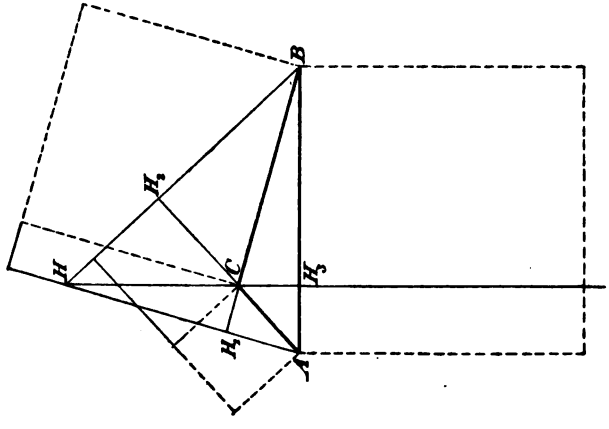


Fig. 131.

Dreiecks als gemeinschaftliche Ecke haben, so sind nach dem vorigen Satze je zwei benachbarte Rechtecke einander gleich.

Je nachdem nun AB einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüber liegt, ist das Quadrat über AB um die Summe der Rechtecke an der Ecke C kleiner oder gröfser als die Summe der Quadrate über den Seiten AC und BC. Somit ergiebt sich der Satz:

Die Summe der Quadrate über zwei Seiten eines Dreiecks ist um das doppelte Rechteck aus einer von ihnen und der auf ihr liegenden Projektion der andern gröfser oder kleiner als das Quadrat über der dritten Seite, je nachdem der Gegenwinkel dieser dritten Seite spitz oder stumpf ist.

In der Zeichensprache lautet der Satz:

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab_1 \quad \text{oder:} \quad c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ba_2.$$

Wenn das Dreieck ABC rechtwinkelig ist, so erhält man auf jeder Kathete eine einzige Projektion, die aber der Kathete selbst gleich ist. Die Rechtecke an der Ecke C verschwinden, und die beiden andern gehen in die Quadrate über den Katheten über. Der vorstehende Satz geht also in den Satz des Pythagoras über und heifst deswegen der allgemeine pythagoreische Lehrsatz.

3. Ist das Quadrat über einer Dreieckseite gröfser als die Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, so ist die einzige Annahme, die nicht mit dem pythagoreischen Lehrsatze in Widerspruch steht, die, dafs der Gegenwinkel jener Seite ein stumpfer ist.

Durch Betrachtung der beiden übrigen Annahmen, die über das Quadrat einer Dreieckseite und die Summe der Quadrate über den beiden andern gemacht werden können, gelangt man zu dem vollständigen Beweise des Satzes:

Je nachdem das Quadrat über einer Dreieckseite gröfser als die Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten oder gleich dieser Summe oder kleiner als diese Summe ist, ist der Gegenwinkel jener Seite stumpf, ein Rechter oder spitz.

4. Nach dem pythagoreischen Lehrsatze ist $a^2 = b^2 + c^2 + 2cb_3$, wenn $a > R$, und $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb_3$, wenn

$a < R$ ist. Im erstern Falle also: $b_3 = \frac{(a^2 - b^2) - c^2}{2c}$, im zweiten: $b_3 = \frac{c^2 - (a^2 - b^2)}{2c}$.

Kennt man von einem Dreieck die Seite c und die Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten: $a^2 - b^2 = p^2$, so ist demnach der Gegenwinkel von a stumpf, wenn $p > c$, oder spitz, wenn $p < c$ ist. In beiden Fällen ist nach den gefundenen Gleichungen b_3, also auch der Fufspunkt der Höhe auf der gegebenen Seite, konstruierbar. Das in ihm auf der gegebenen Seite errichtete Lot ist dann der Ort für die Gegenecke. Somit ergiebt sich:

Der Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die in einer gemeinschaftlichen Seite und in der Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten übereinstimmen, ist eine Gerade, die auf der gegebenen Seite senkrecht steht.

5. Wendet man den pythagoreischen Lehrsatz auf die beiden Dreiecke an, in die das Dreieck ABC durch die Mittellinie CM_3 zerlegt wird (Fig. 132), so ergiebt sich: $a^2 = \frac{c^2}{4} + m_3^2 - c \cdot M_3H_3$ und: $b^2 = \frac{c^2}{4} + m_3^2 + c \cdot M_3H_3$, folglich: $a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_3^2$, oder: $m_3^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

In allen Dreiecken, die in einer gemeinschaftlichen Seite (c) und in der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ($a^2 + b^2$) übereinstimmen, haben also die Gegenecken der gemeinschaftlichen Seite von deren Mittelpunkte gleiche Abstände. Es folgt somit:

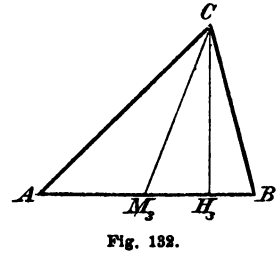


Fig. 132.

Der Ort für die Spitzen aller Dreiecke, die in einer gemeinschaftlichen Seite und der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten übereinstimmen, ist ein Kreis um den Mittelpunkt der gemeinschaftlichen Seite.

6. Hierher gehört auch der im vorigen Paragraphen zur Übung bewiesene Satz:

In winkelgleichen Dreiecken ist das Rechteck aus zwei nicht homologen Seiten beider Dreiecke gleich dem Rechteck aus den Seiten, die zu jenen homolog sind.

Übungen zu § 39.

1. Die Ecken eines Quadrats von der Seite b liegen auf den Seiten (Verlängerungen der Seiten) eines Quadrats von der Seite a. Welche Abstände haben die Ecken des ersten Quadrats von den Mittelpunkten der Seiten des zweiten?

2. Dieselbe Aufgabe für zwei gleichseitige Dreiecke. (Die Gleichung ergiebt sich aus dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze unter Berücksichtigung von § 32, Übung Nr. 22.)

3. Ein Dreieck ist von einer Ecke aus in drei gleiche Teile geteilt: die Teilungslinien sollen durch die Seiten ausgedrückt werden. (Mit Hilfe des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes.)

4. Wird ein rechtwinkeliges Dreieck von dem Scheitel des rechten Winkels aus in drei gleiche Teile geteilt, so ist die Summe der Quadrate über den Teilungslinien gleich der Summe der Quadrate über dem einen Abschnitte der Hypotenuse und über der Summe der beiden andern.

5. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

1) c, $b_3 \pm a_3$, $b \pm a$ 2) b_3, a_3, $b \pm a$.

(Man berücksichtige die Beziehung: $b_3^2 - a_3^2 = b^2 - a^2$.)

6. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

I. 1) $b^2 - a^2$, c 2) $b_3^2 - a_3^2$, c 3) $s_1^2 - s_2^2$, c.

II. 1) a 2) γ 3) $\beta - a$ 4) r 5) s_3 6) $a + b$ 7) $b - a$ 8) h_1 9) h_3 10) m_1 11) m_3 12) $2s$ 13) $s - a$ 14) $s - c$.

(Aus den Werten für $b^2 - a^2$ und $s - a = \frac{b + c - a}{2}$, bezw. $s - c = \frac{b + a - c}{2}$, kann jede der beiden Seiten a und b durch Rechnung bestimmt werden.)

7. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

I. 1) $a^2 + b^2$, c.

II. 1) a 2) γ 3) r 4) s_3 5) $a+b$ 6) $a-b$ 7) h_1 8) h_3 9) m_1 10) $2s$ 11) $s-b$ 12) $s-c$ 13) b_3-a_3 14) c_1 15) $a \cdot b$.

8. Zur Konstruktion eines Dreiecks sind gegeben:

I. 1) c, $s_1^2+s_2^2$.

II. 1) a 2) γ 3) r 4) s_3 5) h_1 6) b_3-a_3 7) c_2 8) b^2-a^2 9) $b_3^2-a_3^2$.

9. Aus folgenden Angaben ein Dreieck zu konstruieren:

I. 1) c, $m_1^2-m_2^2$.

II. 1) $\sphericalangle(cm_1)$ 2) $\sphericalangle(cm_2)-\sphericalangle(cm_1)$ 3) $\sphericalangle(m_1m_2)$ 4) m_3 5) h_3 6) $m_1 \pm m_2$.

10. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem man kennt:

I. 1) c, $m_1^2+m_2^2$.

II. 1) $\sphericalangle(cm_1)$ 2) $\sphericalangle(cm_3)$ 3) h_3 4) $m_1 \pm m_2$ 5) m_1m_2.

11. Die Seiten von Ergänzungsparallelogrammen sind auch Seiten von gleichen Rechtecken. (Siehe § 38, Übung Nr. 7.)

12. Die Rechtecke aus den Abschnitten, welche von dem Schnittpunkte der Höhen eines Dreiecks auf jeder Höhe bestimmt werden, sind gleich.

13. Unter Beibehaltung eines Winkels ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in dem die Gegenseite des beibehaltenen Winkels zu einer gegebenen Geraden parallel ist. (Man berücksichtige auch, daſs die gegebene Gerade und die Gegenseite des beibehaltenen Winkels zwei winkelgleiche Dreiecke bestimmen.)

14. In jedem Dreieck ist: $w_3^2 = ab - a_3b_3$ und $w_3'^2 = a'b_3' - ab$. (Sind S und S' die Schnittpunkte von CW_3 und CW_3' mit dem Umkreise, so sind winkelgleich: 1) ASC und W_3BC, 2) BCW_3 und SAW_3, 3) $AS'C$ und $W_3'BC$, 4) BCW_3' und $S'AW_3'$.)

15. In jedem Dreieck ist: $ab_3 = ba_3$; $ab_3' = ba_3'$; $a_3b_3' = b_3a_3'$. (Haben S und S' dieselbe Bedeutung wie bei

Nr. 14, so sind winkelgleich: 1) BCW_3 und SAW_3, 2) ACW_3 und SBW_3. Die dritte Gleichung ist eine Folge der beiden ersten.)

16. Unter Berücksichtigung der beiden vorhergehenden Nummern sollen aus folgenden Angaben Dreiecke gezeichnet werden:

1) $a, b, \mathfrak{a}_3$ 2) a, b, w_3 3) $a, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ 4) $a, \mathfrak{a}_3, w_3$ 5) $a, \mathfrak{b}_3, w_3$ 6) $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, w_3$ 7) a, b, w_3' 8) $a, \mathfrak{a}_3', \mathfrak{b}_3'$ 9) $a, \mathfrak{a}_3, w_3$ 10) $a, \mathfrak{b}_3', w_3'$ 11) $\mathfrak{a}_3', \mathfrak{b}_3', w_3'$ 12) $a \pm b, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ 13) $a \pm b, \mathfrak{a}_3', \mathfrak{b}_3'$.

17. Wenn von einem Dreieck zwei Ecken und der Fufspunkt der einen Winkelhalbierenden auf ihrer Verbindungslinie gegeben sind, so kann der Fufspunkt der andern Winkelhalbierenden mit Hilfe von drei Kreisen und drei Geraden gefunden werden. (Siehe die Figur zu Nr. 13. Man lege durch die gegebenen Ecken A und B einen beliebigen Kreis und verbinde den gegebenen Fufspunkt W_3 mit dem Punkte S, den der Kreis auf der Achse von AB bestimmt. Ist C der Schnittpunkt der Geraden SW_3 und des Kreises durch A und B, so schneidet die Gerade $S'C$ die Gerade AB in dem gesuchten Punkte.)

18. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn man kennt:

I. 1) A, B, W_3 2) A, B, W_3'.

II. 1) a 2) γ 3) h_3 4) $b_3 \pm a_3$ 5) $b^2 \pm a^2$ 6) $s_1^2 - s_2^2$ 7) r 8) $\varrho_1 + \varrho_2$ 9) $\varrho_3 - \varrho$.

§ 40. Flächenvergleichung bei Sekantenabschnitten.

1. Wenn man durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene des Kreises M zwei Gerade zieht, die den Kreis in A und B, beziehungsweise C und D, schneiden, so ergiebt sich aus dem Satze über Kreiswinkel die Winkelgleichheit der Dreiecke APD und BPC (Fig. 133 u. 134). Also folgt: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. In Worten:

Auf allen Sekanten eines Kreises, die durch einen festen Punkt gehen, bestimmen die Abschnitte, welche der feste Punkt mit den Kreispunkten jeder Sekante begrenzt, gleiche Rechtecke.

2. Wird der feste Punkt P innerhalb des Kreises M angenommen (Fig. 135), so giebt es unter allen Sehnen, die durch P gehen, eine kleinste QR, nämlich die auf dem Durchmesser PM senkrecht stehende. Das Rechteck aus ihren

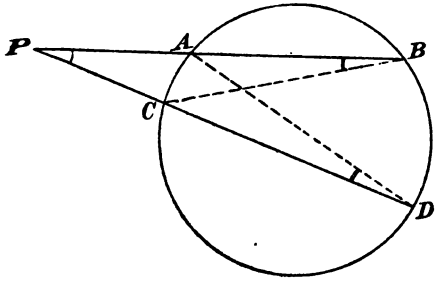


Fig. 133.

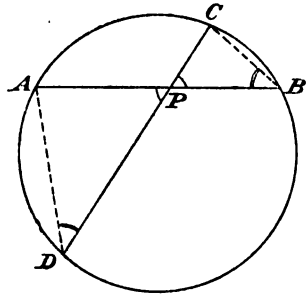


Fig. 134.

Abschnitten PQ und PR ist ein Quadrat vom Umfang $2QR$. Für irgend eine andere Sehne AB, die durch P geht, hat das Rechteck aus den Abschnitten PA und PB den Umfang $2AB$. Da aber $QR < AB$ ist, so ergiebt sich: Unter allen Rechtecken von gleichem Inhalte hat das Quadrat den kleinsten Umfang, und unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat das Quadrat den gröfsten Inhalt.

Sind die Abschnitte PA und PB die Seiten eines gegebenen Rechtecks, so kann durch A und B immer ein Kreis gelegt werden, dessen Durchmesser gröfser als eine gegebene Strecke s ist. In diesem Kreise kann man dann durch P eine Sehne ziehen, die gleich s ist, wofern nur s nicht kleiner ist als die kleinste durch P gehende Sehne. Folglich ist es stets möglich, ein gegebenes Rechteck in ein anderes von vorgeschriebenem Umfange $2s$ zu verwandeln, wofern nur dieser Umfang nicht kleiner ist als der Umfang des Quadrats, das dem gegebenen Rechteck gleich ist.

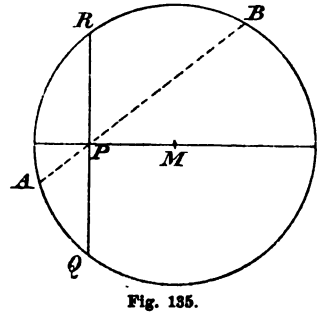


Fig. 135.

3. Wenn der feste Punkt P aufserhalb des Kreises M angenommen wird (Fig. 136), und von P aus eine Tangente PQ gezogen wird, so ist:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{MQ}^2 = (PM + MQ)(PM - MQ)$$
$$= (PM + MD)(PM - MC) = PD \cdot PC$$
$$= PA \cdot PB.$$

Die durch P gehende Tangente ist daher im Sinne des Satzes Nr. 1 zu den durch P gehenden Sekanten zu zählen; das durch sie bestimmte Rechteck ist ein Quadrat.

Sind PA und PB die Seiten eines gegebenen Rechtecks, so kann wieder durch A und B ein Kreis gelegt werden, dessen Durchmesser gröfser als eine vorgeschriebene

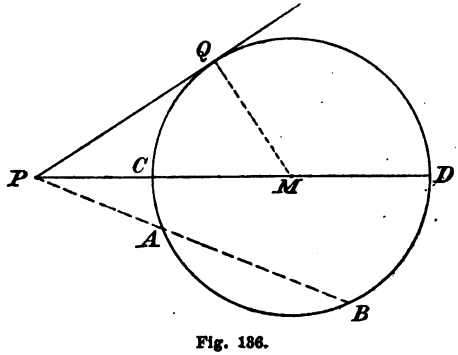


Fig. 136.

Strecke d ist. Man kann dann stets durch P eine Sekante ziehen, auf welcher durch den Kreis eine Sehne von der Länge d ausgeschnitten wird. Folglich ist es stets möglich, das gegebene Rechteck in ein anderes zu verwandeln, in dem die Differenz zweier Anseiten einer vorgeschriebenen Strecke d gleich ist.

4. Wenn zwei Strecken AB und CD (Fig. 137 u. 138) oder deren Verlängerungen sich in einem Punkte P so schneiden, dafs

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

ist, und der durch A, B und C bestimmte Kreis die Gerade PC in X schneidet, so ist auch:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PX.$$

Aus beiden Gleichungen folgt: $PC \cdot PD = PC \cdot PX$ und: $PD = PX$. Da nun die Punkte D und X bezüglich AB in derselben Halbebene liegen, so fallen sie zusammen.

Liegt P auf jeder der beiden Strecken, so sind PA, PB, PC und PD Abschnitte der beiden Strecken. Behält

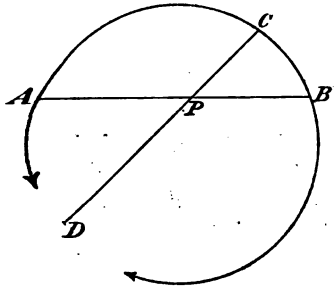


Fig. 137.

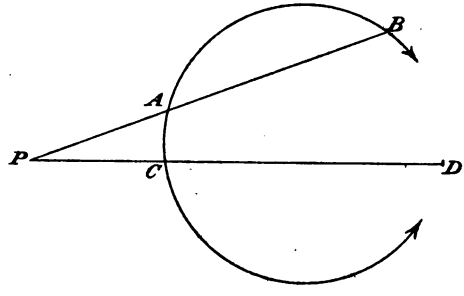


Fig. 138.

man diesen Ausdruck auch für den Fall bei, daſs P auf der Verlängerung jeder Strecke liegt, so kann der Satz ausgesprochen werden:

Wenn zwei Strecken oder die Verlängerungen von zwei Strecken sich so schneiden, daſs das Rechteck aus den Abschnitten der einen Strecke gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der andern ist, so liegen die Endpunkte beider Strecken auf demselben Kreise.

5. Ist $PA \cdot PB = \overline{PC}^2$ (Fig. 139 u. 140), und schneidet der durch A, B und C bestimmte Kreis die Gerade PC

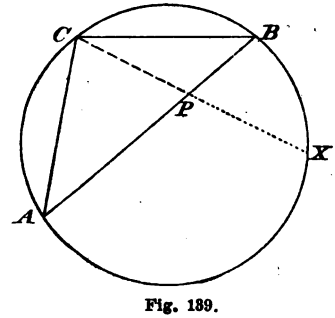


Fig. 139.

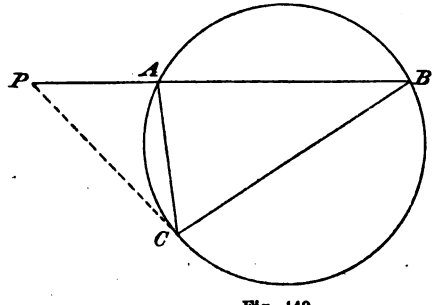


Fig. 140.

in X, so ist auch: $PA \cdot PB = PC \cdot PX$; folglich: $PC \cdot PX = \overline{PC}^2$, und: $PX = PC$.

Liegt nun P auf der Strecke AB (Fig. 139), so gehören bezüglich der Geraden AB die Punkte C und X verschiedenen Halbebenen an; P ist daher der Mittelpunkt der Sehne CX. Wenn aber P ein Punkt der Verlängerung von AB ist (Fig. 140), so liegen C und X bezüglich AB in derselben Halbebene; die Punkte C und X fallen dann zusammen, und PC ist eine Tangente des durch A, B und C bestimmten Kreises. Man erhält somit den Satz:

Wenn das Quadrat über der Verbindungslinie einer Ecke eines Dreiecks mit einem Punkte der Gegenseite gleich dem Rechteck aus den Abschnitten dieser Gegenseite ist, so ist jene Verbindungslinie eine halbe Sehne oder eine Tangente des Umkreises.

Übungen zu § 40.

1. Ein gegebenes Rechteck in ein anderes von vorgeschriebenem Umfange zu verwandeln.

2. Ein gegebenes Rechteck in ein anderes zu verwandeln, in dem der Überschuſs einer Seite über ihre Nachbarseite einer gegebenen Strecke gleich ist.

3. Durch einen gegebenen Punkt auſserhalb eines Kreises eine Sekante so zu legen, daſs das Quadrat über der auf ihr ausgeschnittenen Sehne gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten ist, die der gegebene Punkt mit den Kreispunkten der Sekante begrenzt. Ist die Aufgabe immer möglich? (Man suche die Sehne zu berechnen.)

4. Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises eine Sekante so zu ziehen, daſs entweder 1) der eine Abschnitt doppelt so groſs wie der andere ist, oder 2) der 3. Teil des einen Abschnittes gleich dem 5. Teile des andern ist.

5. In einem gegebenen Kreise eine Sehne so zu ziehen, daſs sie von zwei gegebenen Durchmessern, die aufeinander senkrecht stehen, in drei gleiche Teile geteilt wird. (Man suche die Abschnitte zu berechnen, die die Sehne auf den gegebenen Durchmessern bestimmt.)

6. Ein gegebener Kreis ist durch drei Durchmesser in gleiche Teile geteilt. Eine Sehne soll gezeichnet werden, welche durch die drei Durchmesser in gleiche Teile geteilt wird.

7. In dem gröfsern von zwei gegebenen konzentrischen Kreisen eine Sehne so zu ziehen, dafs entweder 1) sie von dem kleinern in drei gleiche Teile geteilt wird, oder 2) ihr 5. Teil gleich dem 3. der Sehne ist, die der kleinere Kreis auf ihr ausschneidet.

8. Die Lösungen der Gleichungen: $x(b+x)=a^2$; $x(b-x)=a^2$; $x(x-b)=a^2$ sind mit Hilfe der Kreissätze zu finden.

9. In jedem Dreieck ist das Quadrat über der Hälfte einer Seite gleich dem Rechteck aus den Abschnitten, die der Mittelpunkt der Seite mit den Fufspunkten der zugehörigen Winkelhalbierenden begrenzt. (Der Beweis ergiebt sich durch Einführung der in Rede stehenden Gröfsen in die Gleichung $a_s b_s' = b_s a_s'$. Siehe § 39, Übung Nr. 15.)

10. Für alle Kreise, welche durch die Fufspunkte der Winkelhalbierenden auf einer Dreieckseite gehen, sind die Tangenten durch den Seitenmittelpunkt einander gleich. (Siehe Nr. 9.)

11. Der Kreis, welcher durch zwei Ecken eines Dreiecks und den Fufspunkt einer Winkelhalbierenden geht, die zu der einen Ecke gehört, berührt die Gerade, welche die zweite Ecke mit dem Punkte verbindet, in dem jene Winkelhalbierende den Umkreis schneidet. (Man gehe von der Winkelgleichheit der Dreiecke SBC und SBW_s aus. Siehe § 39, Übung Nr. 14.)

12. Durch den Mittelpunkt eines gegebenen Kreisbogens eine Sehne so zu ziehen, dafs ihr zweiter Kreispunkt und die zu dem Bogen gehörige Sehne auf ihr eine Strecke von vorgeschriebener Länge bestimmen. (Siehe Nr. 11. Ist S der Mittelpunkt der Sehne AB, so lege man durch B einen Kreis K, der SB berührt und dessen Durchmesser gleich der vorgeschriebenen Länge ist. Ist P der Schnittpunkt des Kreises K und der Strecke SK, so bestimmt der Kreis um S mit dem Radius SP auf AB den Schnittpunkt der gegebenen und der gesuchten Sehne.)

13. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

I. 1) m_3, h_3 2) h_3, $b_3 \pm a_3$ 3) m_3, $b_3 \pm a_3$.

II. 1) w_3 2) w_3' 3) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 4) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$. (Siehe Nr. 9 und 10.)

14. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem gegeben sind:

I. 1) $\beta - \alpha$.

II. 1) c, h_3 2) $b_3 \pm a_3$, $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 3) $b_3 \pm a_3$, $\mathfrak{b}_3' \pm \mathfrak{a}_3'$.

Dreizehntes Kapitel.

Die Berührungsaufgabe des Apollonius.

§ 41. Die elementaren Lösungen der Berührungsaufgabe.

1. Unter der Berührungsaufgabe des Apollonius versteht man folgende: Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise berührt.

Nimmt der Radius eines Kreises ohne Ende ab, so dafs er schliefslich kleiner wird als jede noch so klein gedachte Strecke, so kann das Auge den Kreis nicht mehr von einem Punkte unterscheiden.

Die Gerade g werde in A durch den Kreis M berührt (Fig. 141), und eine gegebene Parallele zu MA werde von g in P und von M in C geschnitten. Ist dann $M'A > MA$, so folgt: $M'A = M'M + MC$, also: $M'A > M'C$. Wird nun um M' der Kreis mit dem Radius $M'A$ beschrieben, so liegt C innerhalb dieses Kreises; der Kreis M' schneidet daher die Gerade PC in einem Punkte C', der dem Punkte P näher liegt als der Punkt C. Entfernt sich der Punkt M' immer mehr von dem Punkte A, während der Kreis M' ein Be-

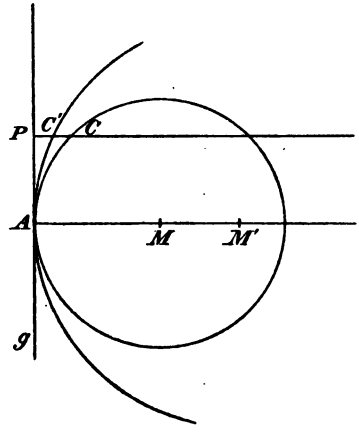


Fig. 141.

rührungskreis der Geraden g bleibt, so wird PC' schliefslich kleiner als jede noch so klein gedachte Strecke. Die Punkte des Kreises M' können dann nicht mehr von den Punkten der Geraden g unterschieden werden.

Aus den vorstehenden Betrachtungen entnehmen wir die Berechtigung, Punkt und Gerade als Grenzgebilde des Kreises zu betrachten und den Punkt als einen Kreis von

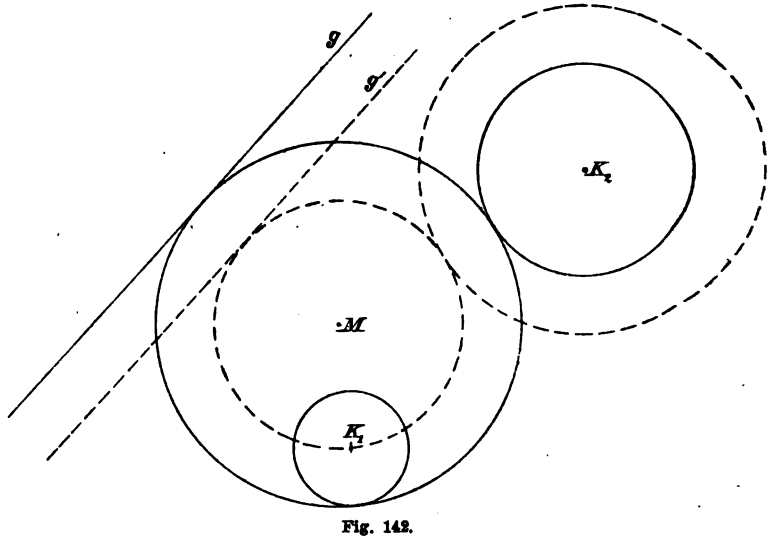


Fig. 142.

unendlich kleinem, die Gerade als einen Kreis von unendlich grofsem Radius aufzufassen.

Bei der Berührungsaufgabe sind daher folgende zehn Fälle zu unterscheiden, wenn die gegebenen Gebilde Punkt, Gerade und Kreis beziehungsweise durch P, G, K bezeichnet werden: 1) P, P, P 2) P, P, G 3) P, P, K 4) P, G, G 5) P, G, K 6) P, K, K 7) G, G, G 8) G, G, K 9) G, K, K 10) K, K, K.

2. Unter den aufgezählten Fällen sind der erste und der siebente bereits gelöst. Die übrigen können in zwei Klassen eingeteilt werden, je nachdem unter den gegebenen Gebilden ein Punkt vorkommt oder nicht.

Wenn der Kreis M die Gerade g und jeden der Kreise K_1 und K_2 berührt (Fig. 142 u. 143), und der Radius r_1 des

Kreises K_1 kleiner als der Radius r_2 des Kreises K_2 ist, so berührt der Kreis um M mit dem Radius MK_1 eine Gerade g', die zu g im Abstande r_1 parallel ist, und einen Kreis um K_2, der je nach der Art der Berührung zwischen M und K_1 den Radius $r_2 - r_1$ oder den Radius $r_2 + r_1$ hat. Der Punkt M kann daher auch als Mittelpunkt eines

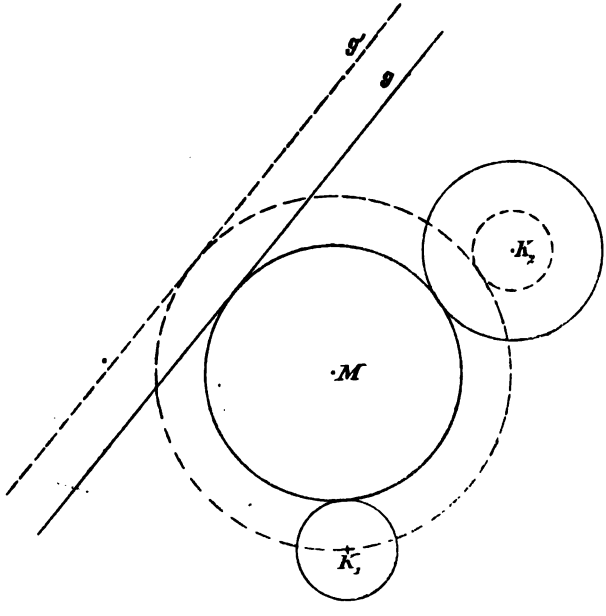


Fig. 143.

Kreises betrachtet werden, der durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Durch eine ähnliche Betrachtung können auch der drittletzte und der letzte Fall auf solche zurückgeführt werden, in welchen unter den gegebenen Gebilden je ein Punkt vorkommt. Man hat sich demnach nur mit der Lösung der folgenden Fälle zu beschäftigen: 1) P, P, G 2) P, P, K 3) P, G, G 4) P, G, K 5) P, K, K.

3. Sei M ein Kreis, der durch die gegebenen Punkte A und B geht und die gegebene Gerade g berührt (Fig. 144). Ist C der Berührungspunkt auf g, und S der Schnittpunkt der Geraden AB und g, so ergiebt sich:

$$\overline{SC}^2 = SA \cdot SB.$$

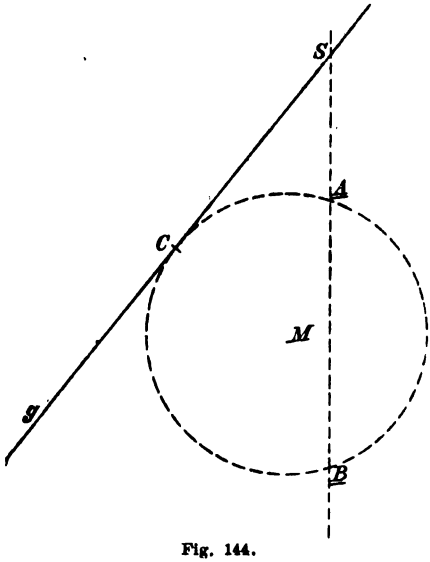


Fig. 144.

Da nun die Strecken SA und SB durch die gegebenen Gebilde bestimmt werden, so ist die Länge der Strecke SC konstruierbar als Tangente durch S an einen beliebigen Kreis, der durch A und B geht. Der Punkt C wird dann auf g durch den Kreis um S mit dem Radius SC ausgeschnitten. Ist C ge-

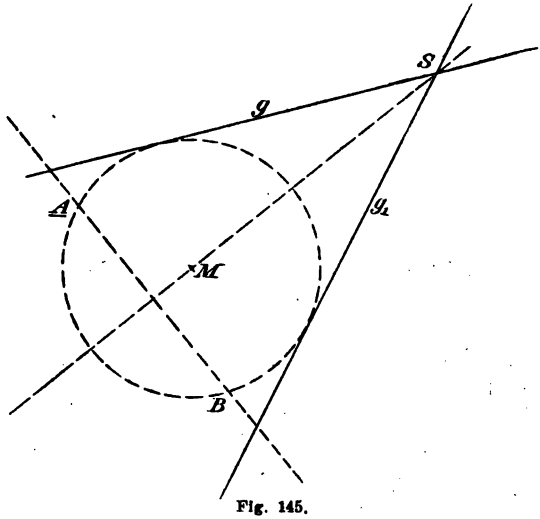


Fig. 145.

funden, so ist die vorliegende Aufgabe auf die andere zurückgeführt: durch drei Punkte einen Kreis zu legen.

Da der Kreis um S, der zur Konstruktion des Punktes C dient, die Gerade g in zwei Punkten schneidet, so hat die Aufgabe zwei Lösungen.

4. Sei M ein Kreis, der durch den gegebenen Punkt A geht und die gegebenen Geraden g und g_1 berührt (Fig. 145). Die Halbierungslinie SM des Winkels (gg_1) ist eine Achse der Figur; der zu A bezüglich SM symmetrische Punkt liegt also auch auf dem Kreise M. Damit ist die Aufgabe auf die vorhin behandelte zurückgeführt, wie diese hat sie zwei Lösungen.

5. Sei M ein Kreis, der durch die gegebenen Punkte A und B geht und den gegebenen Kreis K berührt (Fig. 146).

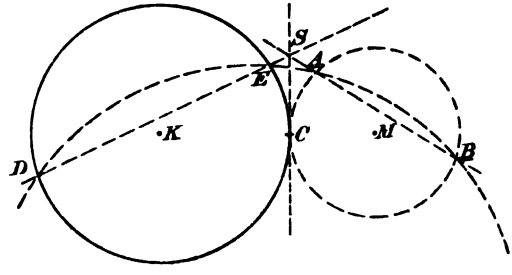


Fig. 146.

Ist C der Berührungspunkt beider Kreise, und S der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangente in C mit der Geraden AB, so erhält man zunächst:

$$\overline{SC}^2 = SA \cdot SB.$$

Wenn auf K ein beliebiger Punkt D angenommen, und die Gerade SD gezogen wird, so ergiebt sich weiter:

$$\overline{SC}^2 = SD \cdot SE,$$

also auch:

$$SA \cdot SB = SD \cdot SE;$$

somit geht durch die Punkte A, B, D und E ein Kreis. Dieser Kreis wird aber durch die drei Punkte A, B und D bestimmt, und da D ein beliebiger Punkt auf K ist, so ist

jener Kreis ein beliebiger Kreis durch A und B, der nur der Bedingung genügt, daſs er K schneidet. Die Verbindungslinie seiner Schnittpunkte mit K und die Gerade AB ergeben den Punkt S, und C ist dann der Berührungspunkt einer durch S an K gezogenen Tangente. Damit sind von dem Kreise M wieder drei Punkte bekannt.

Da durch S zwei Tangenten an den Kreis K gehen, so giebt es auch zwei Kreise dureh A und B, die K berühren.

6. Sei M ein Kreis, der durch den gegebenen Punkt P

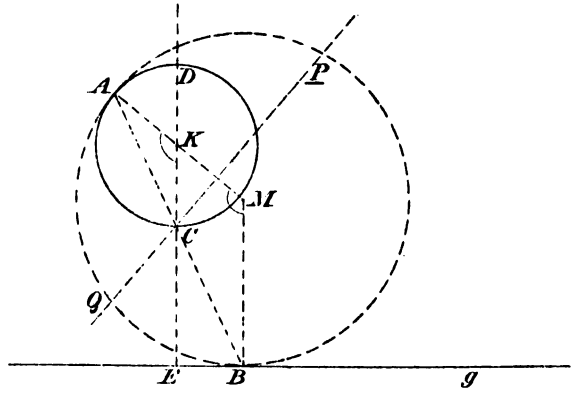


Fig. 147.

geht, die gegebene Gerade g und den gegebenen Kreis K berührt (Fig. 147).

Ist B der Berührungspunkt auf g, A der Berührungspunkt auf K und CD der zu g senkrechte Durchmesser von K, so sind die Winkel an den Spitzen der gleichschenkeligen Dreiecke CKA und BMA entsprechende Streifenwinkel; folglich sind die Dreiecke winkelgleich, und insbesondere ist: $\sphericalangle KAC = MAB$. Die Punkte C, A und B liegen daher in einer Geraden.

Als Winkel im Halbkreise ist der Winkel DAB ein Rechter, daher liegen A und E auf dem Kreise, der BD als Durchmesser hat, und es folgt:

$$CD \cdot CE = CA \cdot CB.$$

Ist Q der Schnittpunkt der Geraden CP und des Kreises M, so ist ferner:

$$CP \cdot CQ = CA \cdot CB,$$

mithin auch:

$$CD \cdot CE = CP \cdot CQ.$$

Durch die Punkte D, E, P und Q geht daher ein Kreis. Da der Durchmesser CD durch die gegebenen Gebilde bestimmt ist, so sind von dem Kreise drei Punkte, nämlich D, E und P bekannt. Der Punkt Q bestimmt sich dann als Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden CP. Somit ist die Aufgabe auf folgende zurückgeführt: Durch die Punkte P und Q einen Kreis zu legen, der die Gerade g berührt.

Die vorstehende Betrachtung kann sowohl für den Fall der einschließenden als auch für den Fall der ausschließenden Berührung angestellt werden. In beiden Fällen gelangt man zu derselben Hilfsaufgabe. Da diese zwei

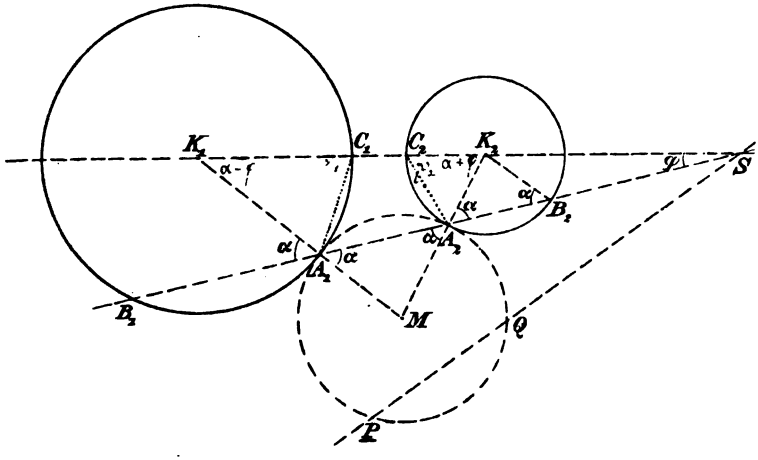


Fig. 148.

Lösungen hat und von dem Kreise K unabhängig ist, so führt jede Art der Berührung der Kreise M und K zu zwei Lösungen; die gestellte Aufgabe hat also deren vier.

7. Sei M ein Kreis, der die gegebenen Kreise K_1 und K_2 berührt und durch den gegebenen Punkt P geht (Fig. 148).

Sind A_1 und A_2 die Berührungspunkte auf K_1, bez. K_2, und schneidet die Gerade A_1A_2 die Centrale K_1K_2 in S und die Kreise K_1 und K_2 in B_1, bez. B_2, so ergiebt sich zunächst:

$$\sphericalangle B_1A_1K_1 = MA_1A_2 = MA_2A_1 = B_2A_2K_2 = A_2B_2K_2;$$

die Geraden K_1A_1 und K_2B_2 sind also parallel und die Dreiecke K_1SA_1 und K_2SB_2 winkelgleich. Somit ergiebt sich:

$$SK_2 \cdot r_1 = SK_1 \cdot r_2;$$

der Punkt S ist daher konstruierbar. (Siehe § 38, Übung Nr. 36.)

Wenn man zur Abkürzung $\sphericalangle MA_1A_2 = \alpha$ und $\sphericalangle K_2SB_2 = \varphi$ setzt und die Schnittpunkte der Kreise und der Centrale mit C_1 und C_2 bezeichnet, so ergiebt sich weiter:

$$\sphericalangle A_2K_2C_2 = \alpha + \varphi \quad \text{und} \quad \sphericalangle A_1K_1C_1 = \alpha - \varphi,$$

folglich für die Aufsenwinkel an den Grundlinien der gleichschenkeligen Dreiecke $A_2C_2K_2$ und $A_1C_1K_1$:

$$\sphericalangle A_2C_2C_1 = R + \frac{\alpha}{2} + \frac{\varphi}{2};$$

$$\sphericalangle MA_1C_1 = R + \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

und schliefslich:

$$\sphericalangle A_2C_2C_1 + A_2A_1C_1 = 2R.$$

Der durch A_2, C_2 und C_1 bestimmte Kreis geht daher durch A_1, und für die durch S gehenden Sekanten ergiebt sich:

$$SA_1 \cdot SA_2 = SC_1 \cdot SC_2.$$

Ist Q der Schnittpunkt der Geraden SP und des Kreises M, so ist auch:

$$SP \cdot SQ = SA_1 \cdot SA_2,$$

also:

$$SP \cdot SQ = SC_1 \cdot SC_2.$$

Durch die Punkte C_1, C_2, P und Q kann daher ein Kreis gelegt werden. Da die Punkte C_1 und C_2 aber durch die gegebenen Gebilde bestimmt sind, so ist der Kreis konstruierbar, und durch ihn wird der Punkt Q auf der Geraden SP ausgeschnitten. Von dem Kreise M sind dann zwei Punkte bekannt, und man gelangt zu der Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Man kann bei der Betrachtung von einem Kreise M ausgehen, der die gegebenen Kreise gleichartig oder beide Kreise ungleichartig berührt. In beiden Fällen gelangt man zu derselben Hilfsaufgabe, welche zwei Lösungen hat. Die gestellte Aufgabe hat demnach vier Lösungen.

8. Bei der Aufgabe G, G, K ist in jedem Winkel der gegebenen Geraden, in dem ein Teil des gegebenen Kreises liegt, ein Berührungskreis denkbar. Da die Aufgabe aber zu der Hilfsaufgabe G, G, P führt, die zwei Lösungen hat, so erhält man jedesmal zwei Berührungskreise. Berücksichtigt man, daſs Teile des gegebenen Kreises in jedem Winkel der beiden Geraden liegen können, so ergiebt sich die Zahl acht als gröſste Anzahl der möglichen Lösungen.

Die Aufgabe G, K, K führt zu der Aufgabe G, K, P, welche vier Lösungen besitzen kann. Da man nun sowohl von einer gleichartigen Berührung der gegebenen Kreise als auch von einer ungleichartigen ausgehen kann, so erhält man wieder höchstens acht Lösungen.

Bei der Aufgabe K, K, K kann der gesuchte Kreis jeden der drei gegebenen ausschlieſsend berühren, oder zwei ausschlieſsend und den dritten einschlieſsend, oder einen ausschlieſsend und die beiden andern einschlieſsend, oder keinen einzigen ausschlieſsend. Es ergeben sich somit acht verschiedene Fälle, und jeder derselben führt zu der Hilfsaufgabe P, K, K, bei der vier Lösungen festgestellt wurden. Da aber durch den betrachteten Fall die Art der Berührung bei der Hilfsaufgabe, ob beide Kreise gleichartig oder beide ungleichartig berührt werden, vorgeschrieben ist, so ergiebt die Hilfsaufgabe jedesmal nur zwei Lösungen. Bei näherer Untersuchung der verschiedenen Fälle zeigt sich aber, daſs dieselben Hilfskreise in je zwei Fällen wiederkehren, so daſs also die acht Fälle auch nur acht mögliche Lösungen ergeben.

Übungen zu § 41.

1. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der den Umfang eines gegebenen Kreises halbiert.

2. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis so schneidet, daſs die gemeinschaftliche Sehne eine vorgeschriebene Länge hat.

3. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und den Umfang eines gegebenen Kreises halbiert.

4. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und einen gegebenen Kreis so schneidet, dafs die gemeinschaftliche Sehne einer gegebenen Strecke gleich ist.

5. Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und entweder den Umfang eines zweiten gegebenen Kreises halbiert oder den zweiten gegebenen Kreis so schneidet, dafs die gemeinschaftliche Sehne einer gegebenen Strecke gleich ist.

6. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der auf einer gegebenen Geraden eine Strecke von vorgeschriebener Länge ausschneidet.

7. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und auf einer zweiten gegebenen Geraden eine Strecke von vorgeschriebener Länge ausschneidet.

8. Einen Kreis zu zeichnen, der die Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks berührt, durch die Spitze geht und auf dem einen Schenkel eine doppelt so grofse Sehne bestimmt wie auf dem andern. (Man suche die Abschnitte auf der Grundlinie durch Gleichungen zu bestimmen.)

9. Einen Kreis zu zeichnen, der eine Dreieckseite berührt, durch deren Gegenecke geht und auf den beiden andern Seiten gleiche Strecken ausschneidet.

Vierzehntes Kapitel.

Maſszahl, Proportionalität und Ähnlichkeit.

§ 42. Strecken, Bogen, Sektoren und Winkel.

1. Wenn die Strecke a ein Vielfaches der Strecke b ist, so kann abgezählt werden, wie oft man b auf einer Geraden fortgesetzt abtragen muſs, um eine Strecke zu erhalten, die gleich a ist. Ist q das Ergebnis der Abzählung, so besteht die Gleichung:

$$a = b \cdot q.$$

Die ganze Zahl q giebt an, in welcher Weise die Strecke a aus der Strecke b hergestellt werden kann.

Ist die Strecke a ein Vielfaches von b, so ist sie auch ein Vielfaches von jeder Strecke, von der b selbst ein Vielfaches ist. Jede Strecke, von der b ein Vielfaches ist, heiſst ein aliquoter Teil von b.

Die Strecke a kann ein Vielfaches eines aliquoten Teiles von b sein, ohne daſs sie von b selbst ein Vielfaches ist. In diesem Falle kann wieder durch Abzählung bestimmt werden, wie oft man jenen aliquoten Teil von b auf einer Geraden fortgesetzt abtragen muſs, um eine Strecke zu erhalten, die gleich a ist. Ist p das Ergebnis der Abzählung und $\frac{b}{n}$ jener aliquote Teil von b, so besteht die Gleichung:

$$a = \frac{b}{n} \cdot p, \quad \text{oder:} \quad a = b \cdot \frac{p}{n}.$$

Der Bruch $\frac{p}{n}$ giebt wieder an, in welcher Weise die Strecke a

aus der Strecke b hergestellt werden kann. In diesem Falle soll a ebenfalls ein Vielfaches von b genannt werden.

Entschließt man sich dazu, den Begriff des Quotienten in die Geometrie herüberzunehmen, so muß im ersten Falle die ganze Zahl q, im zweiten der Bruch $\frac{p}{n}$ als der Quotient der Strecken a und b betrachtet werden.

Der Quotient der Strecken a und b heißt auch die Maßzahl der Strecke a für das Maß b oder das Verhältnis der Strecken a und b.

Für den Quotient der Strecken a und b wird die Schreibweise $\frac{a}{b}$ oder $(a : b)$ gebraucht.

2. Die Gleichungen:

$$a = b \cdot \frac{p}{n} \quad \text{und} \quad a = \frac{b}{n} \cdot p$$

sind inhaltlich identisch mit den Gleichungen:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{n} \quad \text{und} \quad b = \frac{a}{p} \cdot n \quad \text{oder} \quad b = a \cdot \frac{n}{p}.$$

Wenn also die Strecke a eine Maßzahl für das Maß b besitzt, so ist deren reziproker Wert die Maßzahl der Strecke b für das Maß a.

Die Gleichung $\frac{a}{p} = \frac{b}{n}$ lehrt, daß es dann auch aliquote Teile beider Strecken giebt, die einander gleich sind, oder daß a und b ein gemeinschaftliches Maß haben, nämlich die Strecke $\frac{a}{p}$ oder $\frac{b}{n}$. Man sagt auch, daß die Strecken a und b sich wie die Zahlen p und n verhalten.

Man kann somit folgende Reihe von gleichbedeutenden Ausdrucksweisen zusammenstellen:

1) a besitzt eine Maßzahl für das Maß b, a kann durch b gemessen werden, oder a ist ein Vielfaches von b. In Zeichen: $a = b \cdot \frac{p}{n}$.

2) b besitzt eine Maßzahl für das Maß a, b kann durch a gemessen werden, oder b ist ein Vielfaches von a. In Zeichen: $b = a \cdot \frac{n}{p}$.

3) Es giebt aliquote Teile der Strecken a und b, die einander gleich sind, a und b haben ein gemeinschaftliches Maſs, oder a und b verhalten sich wie zwei gegebene Zahlen. In Zeichen: $\frac{a}{p} = \frac{b}{n}$.

4) Die Strecken a und b besitzen einen Quotienten oder ein Verhältnis. In Zeichen: $\frac{a}{b} = \frac{p}{n}$ oder $\frac{b}{a} = \frac{n}{p}$.

Die Maſszahlen zweier Strecken für dasselbe Maſs bieten ein bequemes Hilfsmittel zu ihrer Vergleichung. Man sieht nämlich unmittelbar die Richtigkeit der Sätze ein:

Gleiche Strecken haben gleiche Maſszahlen für dasselbe Maſs, und Strecken, die für dasselbe Maſs gleiche Maſszahlen besitzen, sind gleich.

Haben zwei Strecken ein gemeinschaftliches Maſs, so hat die gröſsere Strecke die gröſsere Maſszahl, und umgekehrt ist diejenige von zwei Strecken, welche die gröſsere Maſszahl für ein gegebenes Maſs besitzt, auch die gröſsere von beiden.

Jede Gleichung oder Ungleichung, die zwischen gegebenen Strecken besteht, gilt auch für deren Maſszahlen, und jede Beziehung zwischen den Maſszahlen gegebener Strecken ist ohne weiteres auf die Strecken übertragbar.

3. Wenn zwei Strecken a und b ein gemeinschaftliches Maſs M haben, so besitzen sie auſser M noch unzählig viele gemeinschaftliche Maſse: jeder aliquote Teil und jedes Vielfache von M ist wieder ein gemeinschaftliches Maſs für a und b.

Es seien M und M' zwei gemeinschaftliche Maſse der Strecken a und b, p und q die Maſszahlen der Strecken für das Maſs M, p' und q' die Maſszahlen für das Maſs M'.

Aus der Voraussetzung ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$a = M \cdot p; \quad b = M \cdot q; \quad a = M' \cdot p'; \quad b = M' \cdot q';$$

woraus folgt:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{p}{q} \text{ und: } \frac{a}{p'} = \frac{b}{q'} \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{p'}{q'}.$$

Der Quotient beider Strecken drückt sich somit durch jeden

der beiden Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ aus, und es ergiebt sich die Notwendigkeit, diese Brüche zu vergleichen.

Aus den Gleichungen:

$$a = M \cdot p \quad \text{und} \quad a = M' \cdot p'$$

folgt:

$$aq' = (Mp)q' = M(pq') \quad \text{und:} \quad aq' = (M'p')q' = M'(p'q').$$

Ebenso ergeben die Gleichungen für b die folgenden:

$$bp' = (Mq)p' = M(qp') \quad \text{und:} \quad bp' = (M'q')p' = M'(q'p').$$

Da nun die Strecken aq' und bp' für das Maß M' gleiche Maßzahlen besitzen, so ergiebt sich weiter:

$$aq' = bp',$$

folglich sind auch ihre Maßzahlen für das Maß M einander gleich, und es ist:

$$pq' = qp' \quad \text{oder} \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

Der Begriff des Quotienten zweier Strecken ist also ein eindeutiger Begriff. Er ist gleich dem Quotient der Maßzahlen beider Strecken für ein und dasselbe Maß, das im übrigen unter den vorhandenen gemeinschaftlichen Maßen willkürlich gewählt werden darf.

4. Ist $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ oder $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$, so ist auch: $a = Mp$ und $b = Mq$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$an = (Mp)n = M(pn); \; bn = (Mq)n = M(qn)$$

und:

$$(a : n) = (Mp) : n = M(p : n); \quad (b : n) = (Mq) : n = M(q : n),$$

also:

$$\frac{an}{bn} = \frac{pn}{qn} \quad \text{und} \quad \frac{(a : n)}{(b : n)} = \frac{(p : n)}{(q : n)}.$$

Da nun ein Quotient von zwei Zahlen durch Kürzen und Erweitern seinen Wert nicht ändert, so folgt:

$$\frac{an}{bn} = \frac{p}{q} \quad \text{und:} \quad \frac{(a : n)}{(b : n)} = \frac{p}{q}.$$

Der für Quotienten von Zahlen giltige Fundamentalsatz

über das Kürzen und Erweitern ist somit auf Quotienten von Strecken übertragbar.

5. Da der Begriff des Quotienten von Strecken nur unter gewissen Voraussetzungen entwickelt wurde, so entsteht die Frage, ob von zwei willkürlich gewählten Strecken a und b ein Quotient angegeben werden kann.

Trägt man von einem Punkte einer Geraden aus einen aliquoten Teil von b, z. B. die Strecke $\frac{b}{n}$, fortgesetzt ab, so erhält man die Gesamtheit der ganzzahligen Vielfachen von $\frac{b}{n}$, nämlich:

$$\frac{b}{n}, \frac{b}{n} \cdot 2, \frac{b}{n} \cdot 3 \ldots$$

Ist a einer dieser Strecken gleich, so ist die Maſszahl der Strecke a für das Maſs b, also auch der Quotient $\frac{a}{b}$, gefunden. Ist kein ganzzahliges Vielfache von $\frac{b}{n}$ der Strecke a gleich, so kann man stets in der abgeleiteten Reihe zwei Nachbarstrecken angeben, von denen die eine kleiner als a, die andere aber gröſser als a ist, z. B.: $\frac{b}{n} \cdot p$ und $\frac{b}{n}(p+1)$.

Der Unterschied zwischen den beiden Strecken, die a einschlieſsen, beträgt $\frac{b}{n}$. Da nun n gröſser gewählt werden kann als jede noch so groſs gedachte Zahl, so kann bewirkt werden, daſs $\frac{b}{n}$ kleiner wird als jede noch so kleine Strecke, die man sich von vornherein vorschreibt. Man kann also für die willkürlich gewählte Strecke a stets zwei Grenzen angeben, die durch die willkürlich gewählte Strecke b gemessen werden können, und die sich um weniger als jede noch so klein gedachte Strecke voneinander unterscheiden. Von zwei solchen Strecken kann kein Unterschied angegeben werden, sie müssen daher als gleich betrachtet werden. Da nun der Unterschied zwischen der Strecke a und irgend einer ihrer Grenzen kleiner als der

Unterschied zwischen den Grenzen selbst ist, so muß die Strecke a auch jeder ihrer Grenzen gleichgesetzt werden. Wenn man die Grenzen von a als gleiche Strecken betrachtet, so müssen auch ihre Maßzahlen als gleiche Zahlen und als Grenzen für die Maßzahl der Strecke a betrachtet werden. Die Maßzahl von a ist somit mit den Maßzahlen der Grenzen von a zu identifizieren.

Für zwei beliebig gewählte Strecken a und b erhalten wir demnach folgendes Ergebnis: entweder kann man durch eine Zahl angeben, in welcher Weise die eine der beiden Strecken durch Teilung und Vervielfältigung aus der andern hergestellt werden kann, oder es existiert eine Zahl, die angiebt, in welcher Weise aus der einen der beiden Strecken eine dritte hergestellt werden kann, die sich von der zweiten der gegebenen Strecken nicht unterscheiden läßt. Im ersten Falle ist die erwähnte Zahl der Quotient der gegebenen Strecken, im zweiten identifiziert man den Quotient der Strecken mit jener Zahl. Man wird so dazu geführt, von einem Verhältnis im engern und einem Verhältnis im weitern Sinne zu sprechen, und dementsprechend auch von einem gemeinschaftlichen Maße im engern und im weitern Sinne des Wortes.

6. Wenn man bei dem vorhin beschriebenen Verfahren feststellt, daß a keinem ganzzahligen Vielfachen der Strecke $\frac{b}{n}$ für alle möglichen Werte von n gleich ist, so darf wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente keineswegs gefolgert werden, daß a und b kein gemeinschaftliches Maß im engern Sinne besitzen. Die Frage, ob es überhaupt Strecken giebt, die kein gemeinschaftliches Maß im engern Sinne haben, wird durch die vorige Betrachtung in keiner Weise berührt.

Wenn a und b ein solches gemeinschaftliches Maß haben, so ist jeder aliquote Teil desselben wieder ein gemeinschaftliches Maß; folglich giebt es kein kleinstes gemeinschaftliches Maß zweier Strecken. Hingegen muß es ein größtes geben, da keines der gemeinschaftlichen Maße im engern Sinne größer als die kleinere der beiden gegebenen Srecken sein kann.

Ist $a > b$, so kann man durch fortgesetztes Abtragen von b auf a ein Vielfaches von b bestimmen, welches

kleiner als a ist, aber sich von a um einen Rest unterscheidet, der kleiner als b ist. Sei bq dies Vielfache und $a = bq + r_1$, so ergiebt sich: das gröfste gemeinschaftliche Mafs von a und b ist auch ein Mafs für den Rest r_1, und umgekehrt ist das gröfste gemeinschaftliche Mafs der Strecken b und r_1 auch ein Mafs für die Strecke a, folglich das gröfste gemeinschaftliche Mafs der Strecken a und b.

Mit den Strecken b und r_1 kann man in derselben Weise verfahren, wie mit a und b: man bestimme ein Vielfaches von r_1, welches kleiner als b ist, aber sich von b um eine Strecke r_2 unterscheidet, die kleiner als r_1 ist. Man gelangt so zu einer neuen Gleichung, die dieselbe Form hat wie die frühere, nämlich:

$$b = r_1 q_1 + r_2 .$$

Wie früher ergiebt sich: Das gröfste gemeinschaftliche Mafs von r_1 und r_2 ist auch das gröfste für b und r_1, folglich auch für a und b.

Trägt man nun r_2 auf r_1 fortgesetzt ab, bis man zu einem Reste r_3 gelangt, der kleiner als r_2 ist, und wiederholt mit dem vorletzten und letzten Reste dasselbe Verfahren immer wieder, so mufs von zwei Fällen der eine eintreten: entweder kann das Verfahren ohne Ende wiederholt werden, oder es stellt sich einmal beim Abtragen heraus, dafs der zuletzt erhaltene Rest ein aliquoter Teil des vorletzten Restes ist.

Im zweiten Falle ist der letzte Rest das gröfste gemeinschaftliche Mafs der beiden letzten Reste, folglich auch von a und b.

Wenn das Verfahren ohne Ende wiederholt werden kann, so gelangt man zu einer Reihe: $a, b, r_1, r_2, r_3 \ldots$, die unendlich viele Glieder enthält, und in welcher von zwei Nachbargliedern das folgende kleiner als sein Vorderglied ist. Da nun b mindestens einmal auf a abgetragen werden kann, so ergiebt sich:

$$a \geqq b + r_1 .$$

Aber es ist:

$$b > r_1, \quad \text{folglich} \quad a > 2r_1 \quad \text{und:} \quad r_1 < \frac{a}{2} .$$

Zwischen r_1, r_2 und r_3 besteht nun dieselbe Beziehung, wie zwischen a, b und r_1, folglich ist auch:

$$r_3 < \frac{r_1}{2} \quad \text{und:} \quad r_3 < \frac{a}{4}.$$

Wenn man unter n eine der beiden Zahlen 0 und 1 versteht, so können die für r_1 und r_3 erhaltenen durch die einzige Ungleichung

$$r_{2n+1} < \frac{a}{2 \cdot 2^n}$$

ausgedrückt werden. Setzt man nun voraus, daß für irgend einen Rest r_{2k+1} die Ungleichung

$$r_{2k+1} < \frac{a}{2 \cdot 2^k}$$

besteht, so folgt durch Wiederholung der obigen Schlußweise:

$$r_{2k+3} < \frac{r_{2k+1}}{2}, \quad \text{also:} \quad r_{2(k+1)+1} < \frac{a}{2 \cdot 2^{k+1}}.$$

Wenn daher die Beziehung $r_{2n+1} < \frac{a}{2 \cdot 2^n}$ für die ganze Zahl k gilt, so ist sie auch für die nächst größere ganze Zahl $k+1$ gültig. Nun besteht jene Ungleichung aber zu Recht für die ganze Zahl $n = 1$, folglich bleibt sie für $n = 2$, $n = 3$ u. s. w. bestehen; sie gilt also für jede ganze Zahl, die man durch Zählen erreichen kann.

Ist nun ε eine beliebig kleine, von vornherein vorgeschriebene Strecke, so kann man die ganze Zahl n so wählen, daß $\frac{a}{2 \cdot 2^n} < \varepsilon$ wird. Man kann daher in der betrachteten Reihe stets ein Glied angeben, welches kleiner als ε ist, man mag ε so klein annehmen, wie man will.

Hätten nun a und b das größte gemeinschaftliche Maß M, so müßte jedes Glied der Reihe ein ganzzahliges Vielfache von M sein. Da man aber die Strecke ε kleiner als M wählen kann, so sind von einer bestimmten Stelle ab alle Glieder der Reihe kleiner als M; diese sind also keine ganzzahligen Vielfachen von M. Um zu beweisen, daß a und b kein gemeinschaftliches Maß im engern Sinne haben oder in-

kommensurabel sind, genügt es daher nachzuweisen, daſs die Anwendung des beschriebenen Verfahrens zu keinem Ende führt.

7. Sei a die Diagonale eines Quadrats $ABCD$ von der Seite b.

Da $b < a < 2b$ ist, so ist die Differenz $a - b$ kleiner als b; die erste Gleichung lautet daher:

$$a = b + r_1.$$

Trägt man die Quadratseite auf BD ab, so ist $DE = r_1$ (Fig. 147). Errichtet man in E auf BD das Lot EF, so erhält man ein gleichschenkeliges Dreieck DEF und zwei kongruente Dreiecke ABF und EBF, also:

$$AF = EF = ED = r_1.$$

Da nun wieder $FE < FD < 2FE$ ist, so erhält man als zweite Gleichung:

$$b = 2r_1 + r_2.$$

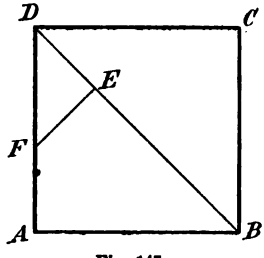


Fig. 147.

Die Strecke b ist die Seite eines Quadrats, in dem die Differenz zwischen Diagonale und Seite gleich r_1 ist. Nun ist aber r_1 auch die Seite eines Quadrats, in dem die Differenz zwischen Diagonale und Seite gleich r_2 ist. Somit besteht zwischen r_2 und r_1 dieselbe Beziehung wie zwischen r_1 und b, und das Glied r_3 der Reihe wird aus r_1 und r_2 in derselben Weise erhalten wie r_2 aus b und r_1. Es besteht daher auch zwischen r_1, r_2 und r_3 dieselbe Gleichung wie zwischen b, r_1 und r_2, nämlich:

$$r_1 = 2r_2 + r_3.$$

Damit ist bewiesen, daſs das Verfahren zu keinem Ende führt, und daſs bei weiterer Fortsetzung desselben die Gleichungen sich mit demselben Koeffizienten im ersten Gliede rechts wiederholen. Die Diagonale und die Seite eines Quadrats sind also inkommensurabel.

8. Um Grenzen für das Verhältnis der Diagonale und der Seite zu finden, gehe man von den erhaltenen Gleichungen aus:

$a = b + r_1$; $b = 2r_1 + r_2$; $r_1 = 2r_2 + r_3$; $r_2 = 2r_3 + r_4 \ldots$,

und leite aus ihnen die folgenden ab:

$$r_1 = a - b; \quad r_2 = 3b - 2a; \quad r_3 = 5a - 7b;$$
$$r_4 = 17b - 12a; \quad r_5 = 29a - 41b \ldots$$

Da aber:

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 \ldots,$$

so folgt weiter:

$$a > b > a - b > 3b - 2a > 5a - 7b > 17b - 12a$$
$$> 29a - 41b > \ldots$$

Je zwei Nachbarglieder der Reihe ergeben also eine Beziehung zwischen a und b, nämlich:

$$1)\ a > b \quad 2)\ a < b \cdot 2 \quad 3)\ a > b \cdot \frac{4}{3} \quad 4)\ a < b \cdot \frac{10}{7}$$

$$5)\ a > b \cdot \frac{24}{17} \quad 6)\ a < b \cdot \frac{58}{41} \ldots,$$

und man erhält eine Reihe von obern und von untern Grenzen für das Verhältnis von Diagonale und Seite:

$$\text{obere Grenzen: } 2, \ \frac{10}{7}, \ \frac{58}{41}, \ \frac{338}{239} \ldots$$

$$\text{untere Grenzen: } 1, \ \frac{4}{3}, \ \frac{24}{17}, \ \frac{140}{99} \ldots$$

Aus den vorstehenden Rechnungen ergeben sich folgende Regeln:

Nachdem die Inkommensurabilität der gegebenen Strecken a und b bewiesen ist, wird die Gesetzmäßigkeit bei den Gleichungen und für jeden einzelnen Rest der zugehörige Koeffizient festgestellt.

Um die Koeffizienten von a und b in der Gleichung zu erhalten, welche den Rest r_k zu b und a in Beziehung setzt, multipliziere man in der Gleichung, die den Rest r_{k-1} durch b und a ausdrückt, jeden Koeffizienten mit dem zu r_{k-1} gehörigen Koeffizienten und addiere die erhaltenen Produkte beziehungsweise zu den Koeffizienten der Gleichung, die die Beziehung des Restes r_{k-2} zu a und b festlegt.

Nachdem die Reste durch b und a ausgedrückt sind, dividiere man für je zwei aufeinander folgende Reste die

Summe der Koeffizienten von b durch die Summe der Koeffizienten von a: die erhaltenen Brüche sind dann abwechselnd untere und obere Grenzen für das Verhältnis der Strecken a und b.

Irgend ein Glied der Reihe $a, b, r_1, r_2, r_3, \ldots$ kann nach der gegebenen Regel nur dann durch a und b ausgedrückt werden, wenn seine beiden Vorderglieder es bereits sind. Man kann die Regel also schon für r_1 anwenden, wenn man setzt:

$$a = 1 \cdot a + 0 \cdot b \quad \text{und} \quad b = 1 \cdot b - 0 \cdot a.$$

Zur Bequemlichkeit der Rechnung dient folgendes Schema:

Zu den Resten gehörige Koeffizienten			1	2	2	2	2	2	2	2	2
Koeffizienten von b	0	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393
Koeffizienten von a	1	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985

Untere Grenzen . .	$\frac{1}{1}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{24}{17}$		$\frac{140}{99}$		$\frac{816}{577}$		
Obere Grenzen . .		$\frac{2}{1}$		$\frac{10}{7}$		$\frac{58}{41}$		$\frac{338}{239}$		$\frac{1970}{1393}$	

9. Der Beweis, dafs die Diagonale und die Seite eines Quadrats inkommensurabel sind, kann auch durch Rechnung erbracht werden.

Aus der Gleichung $a^2 = 2b^2$ ergiebt sich zunächst:

$$a > b \text{ und } a < 2b, \text{ mithin: } a = b + r_1.$$

Je nachdem nun $b \gtreqless 2r_1$ ist, ist $r_1 \lesseqgtr \frac{b}{2}$ und $a \lesseqgtr \frac{3b}{2}$, oder $2a \lesseqgtr 3b$, oder auch: $4a^2 \lesseqgtr 9b^2$. Da aber $4a^2 = 8b^2$ ist, so ergiebt sich: $4a^2 < 9b^2$, mithin auch: $b > 2r_1$. Somit ist als zweite Gleichung anzusetzen:

$$b = 2r_1 + r_2.$$

Wenn man r_1 mit r_2 in derselben Weise vergleicht wie vorhin b mit r_1, so gelangt man zu dem Ergebnis, dafs

$r_1 > 2r_2$ ist. Die dritte Gleichung lautet daher:

$$r_1 = 2r_2 + r_3.$$

Da nun zu r_2 derselbe Koeffizient gehört wie zu r_1, so wird man zu der Untersuchung veranlaßt, ob etwa r_2 zu r_1 dieselbe Beziehung habe wie r_1 zu b; denn in diesem Falle wird das Verfahren zu keinem Ende führen.

Da $r_1 = a - b$ und $a^2 = 2b^2$ ist, so besteht zwischen r_1 und b die Gleichung:

$$(r_1 + b)^2 = 2b^2.$$

Nun ist $r_2 = 3b - 2a$, folglich:

$$(r_2 + r_1)^2 = (2b - a)^2 = 4b^2 - 4ab + a^2 = 6b^2 - 4ab.$$

Andererseits ist aber auch:

$$r_1^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 3b^2 - 2ab,$$

folglich:

$$(r_2 + r_1)^2 = 2r_1^2.$$

Damit ist bewiesen, daß das Verfahren zu keinem Ende führt, und die Gesetzmäßigkeit für die zu den Resten gehörigen Koeffizienten ist gefunden.

10. Wenn eine Kreisfläche M durch Strahlen, die von ihrem Mittelpunkte ausgehen, in 360 gleiche Teile geteilt ist, so zerfällt auch die zugehörige Kreislinie in 360 gleiche Bogen. Aus den Sätzen über entsprechende Gebilde in konzentrischen Kreisen ergiebt sich, daß die von M ausgehenden Strahlen auch jeden Kreis, der zu M konzentrisch ist, in 360 gleiche Sektoren, bez. Bogen, und die Ebene in 360 gleiche Winkel zerlegen.

Wählt man unter den gedachten Strahlen zwei beliebige, MA und MB, aus, so bestimmen diese in den zu M konzentrischen Kreisen eine Gesamtheit von entsprechenden Sektoren und Bogen. Jedes zu dieser Gesamtheit gehörige Gebilde setzt sich aus ebensoviel gleichen Teilen zusammen wie jedes andere: die Anzahl derselben kann also durch Abzählen auf einem einzigen dieser Gebilde bestimmt werden. Ist p das Ergebnis der Abzählung, so giebt die Zahl $\frac{p}{360}$ an, durch welche Teilung und Vervielfältigung irgend ein Gebilde der betrachteten Gesamtheit aus seinem Kreise hergestellt

werden muſs. Dieselbe Zahl drückt auch die Beziehung des Winkels AMB zur Ebene aus. Wir sind somit berechtigt, die Zahl $\frac{p}{360}$ als Maſszahl jedes Sektors und Bogens zu betrachten, der durch die Strahlen MA und MB bestimmt wird, sowie als Maſszahl des Winkels AMB.

Um Brüche zu vermeiden, nennt man Grad den Sektor, bez. Bogen, der den 360. Teil seines Kreises beträgt. Dieselbe Bezeichnung wird für den Winkel gebraucht, der einem solchen Bogen oder Sektor entspricht. Bei dem vorigen Beispiele würde man also von einem Sektor, Bogen oder Winkel von p Grad (in Zeichen: p^0) sprechen.

11. Sei nun AMB ein Sektor eines beliebigen Kreises M. Ein durch Radien in Grade geteilter Kreis M' kann so gelegt werden, daſs sein Mittelpunkt auf M und einer seiner Radien, etwa $M'A'$, auf den Strahl MA fällt. Wird dann gleichzeitig ein zweiter Radius des Kreises M', etwa $M'B'$, durch den Strahl MB gedeckt, so wird durch Abzählung der auf dem Bogen $A'B'$ liegenden gleichen Teile die Maſszahl des Bogens $A'B'$, mithin auch die des Bogens AB, des Sektors AMB und des Winkels AMB, unmittelbar erhalten.

Tritt der Fall ein, daſs keiner der in M' gezogenen Radien auf den Strahl MB fällt, nachdem der Radius $M'A'$ auf den Strahl MA gelegt ist, so wähle man in M' denjenigen Radius $M'C'$ aus, welcher von allen Radien des Kreises M' mit dem Strahle MB den kleinsten Sektor bestimmt. Für gewöhnliche Zwecke nimmt man dann als Maſszahl des Bogens AB, des Sektors AMB und des Winkels AMB die Maſszahl des Bogens $A'C'$ an.

Für genauere Messungen teilt man die Grade selbst wieder in gleiche Teile: jeden Grad in 60 Minuten (in Zeichen: $'$), jede Minute in 60 Sekunden (in Zeichen: $''$). Die geteilten Kreise, die zur Messung benutzt werden sollen, müssen dann entsprechend groſs genommen, und unter Umständen müssen Lupen zur Unterscheidung der gleichen Teile benutzt werden.

Zur Bestimmung der Maſszahl eines Bogens ist, wie man leicht einsieht, ein geteilter Halbkreis hinreichend. Wenn der zu messende Bogen gröſser als ein Halbkreis ist, so kann man statt seiner den Bogen messen, der jenen zu

dem ganzen Kreise ergänzt: die Summe aus der gesuchten und der gefundenen Maſszahl ist dann gleich 360.

Es ist auch ohne weiteres ersichtlich, in welcher Weise mit Hilfe eines geteilten Halbkreises ein Bogen, Sektor oder Winkel gezeichnet werden kann, der eine vorgeschriebene Maſszahl besitzt.

Übungen zu § 42.

1. Eine Strecke zu zeichnen, die für das gegebene Maſs b die Maſszahl $\frac{8}{3}$ hat.

2. Eine Strecke zu zeichnen, bezüglich deren die gegebene Strecke a die Maſszahl $\frac{2}{7}$ hat.

3. Zwei Strecken zu zeichnen, die sich wie 5 zu 8 verhalten.

4. Eine Strecke zu zeichnen, die sich zu der gegebenen Strecke b wie 4 zu 9 verhält.

5. Aus dem gegebenen Verhältnis von zwei Strecken soll das Verhältnis ihrer Summe zu ihrer Differenz abgeleitet werden. Welcher Satz spricht die Beziehung dieses Verhältnisses zu den Maſszahlen der gegebenen Strecken aus?

6. Zwei Strecken zu zeichnen, wenn man ihr Verhältnis und ihre Summe oder ihre Differenz kennt.

7. Die Inkommensurabilität zu beweisen: 1) der Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, welches die Hälfte eines gleichseitigen ist, 2) einer Strecke und der gröſsern ihrer durch den goldenen Schnitt erhaltenen Abschnitte. (Siehe § 38, 7.)

Ist a die gröſsere, b die kleinere Kathete, so ist: $a^2 = 3b^2$. Durch ähnliche Betrachtungen wie in Nr. 9 des vorliegenden Paragraphen gelangt man zu den Gleichungen:

$$a = b + r_1;\quad b = r_1 + r_2;\quad r_1 = 2r_2 + r_3;\quad r_2 = r_3 + r_4;$$
$$r_3 = 2r_4 + r_5.$$

Nun ist:

$$(r_1 + b)^2 = 3b^2$$

und

$$(r_3 + r_2)^2 = (2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2 = 21b^2 - 12ab$$
$$= 3(7b^2 - 4ab).$$

Andererseits aber auch:

$$r_2^2 = (2b - a)^2 = 4b^2 - 4ab + a^2 = 7b^2 - 4ab.$$

Mithin:

$$(r_3 + r_2)^2 = 3r_2^2.$$

Oder: Wenn man um die Endpunkte C und B der gröſsern Kathete mit der kleinern als Radius Kreise beschreibt, die BC beziehungsweise in D und E schneiden, so ist (Fig. 148):

$$BD = r_1 \text{ und } DE = r_2.$$

Wird BD durch den Kreis um D mit dem Radius DE in F geschnitten, so bestimmt das in F auf BF errichtete Lot $FG = x$ ein rechtwinkeliges Dreieck BFG, welches wieder die Hälfte eines gleichseitigen ist, und zwar ist $r_1 - r_2$ die gröſsere und x die kleinere Kathete. Aus dem Satze über winkelgleiche Dreiecke ergiebt sich:

$$ax = b(r_1 - r_2).$$

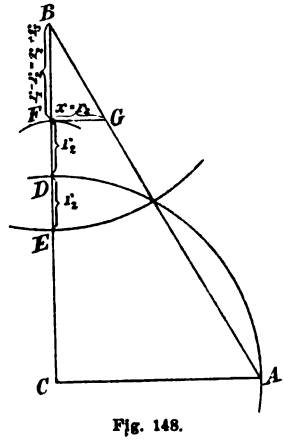


Fig. 148.

Da aber $r_1 - r_2 = 2a - 3b$ ist, so folgt weiter:

$$ax = 2ab - 3b^2 = 2ab - a^2,$$

mithin:

$$x = 2b - a = r_2.$$

Die Strecke r_2 kann somit einmal auf BF abgetragen werden. Daher ist:

$$r_1 - r_2 = r_2 + r_3.$$

Die Strecken $r_2 + r_3$ und r_2 sind also Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, das die Hälfte eines gleichseitigen ist. Somit besteht zwischen $r_2 + r_3$ und r_2 dieselbe Beziehung wie zwischen $b + r_1$ und b.

(Der Beweis der 2. Aufgabe soll durch Rechnung geführt werden.)

8. Zwischen welchen Grenzen liegt die Maßzahl für die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, wenn die Seite als Maß genommen wird? (Siehe Nr. 7.)

9. Welche Maßzahlen besitzen die Abschnitte einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke, wenn diese selbst als Maß genommen wird?

§ 43. Die Flächen.

1. Sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Seiten a und b ganzzahlige Vielfache ihres gemeinschaftlichen Maßes M sind (Fig. 149):

$$a = M \cdot p; \quad b = M \cdot q.$$

Teilt man AB in p, AD in q gleiche Teile und errichtet man in den Teilpunkten die Lote auf AB und CD,

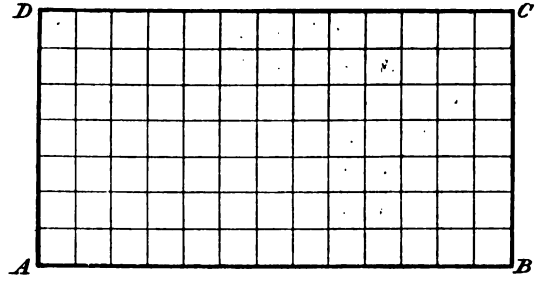


Fig. 149.

so wird durch die erste Gruppe von Loten das Rechteck $ABCD$ in p kongruente Rechtecke, durch die zweite Gruppe jedes dieser Rechtecke in q Quadrate von der Seite M geteilt. Das Rechteck $ABCD$ zerfällt somit in pq Quadrate von der Seite M, es ist dann:

$$ABCD = M^2 \cdot pq.$$

Die ganze Zahl pq giebt also an, in welcher Weise aus dem Quadrat über M eine Fläche hergestellt werden kann, die dem Rechteck $ABCD$ gleich ist.

Angenommen, die Maßzahlen der Seiten a und b des betrachteten Rechtecks seien Brüche:

$$a = M \cdot \frac{p}{n} \quad \text{und} \quad b = M \cdot \frac{q}{s}.$$

Teilt man wieder AB in p, AD in q gleiche Teile, so wird durch die in den Teilpunkten auf den Seiten errichteten Lote das Rechteck $ABCD$ wieder in pq Rechtecke geteilt (Fig. 150). In jedem dieser Teilrechtecke ist die eine Seite gleich $\frac{M}{n}$, die andere gleich $\frac{M}{s}$; die Teilrechtecke sind also kongruent.

Wenn man nun in dem Quadrat über M eine Seite in n, eine Nachbarseite in s gleiche Teile teilt und in den Teilpunkten die Lote errichtet, so zerfällt das Quadrat in

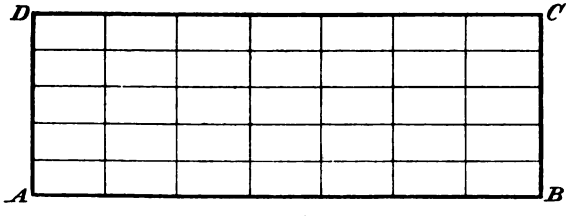


Fig. 150.

ns Teilrechtecke, die sowohl untereinander als auch den Teilrechtecken von $ABCD$ kongruent sind. Jedes dieser Teilrechtecke wird also durch $\frac{M^2}{ns}$ ausgedrückt, und es folgt:

$$ABCD = \frac{M^2}{ns} \cdot pq,$$

oder auch in anderer Schreibweise:

$$ABCD = M^2 \cdot \frac{pq}{ns}.$$

Der Bruch $\frac{pq}{ns}$ giebt also wieder an, in welcher Weise aus dem Quadrat über M eine Fläche herzustellen ist, die dem Rechteck $ABCD$ gleich ist.

Wenn die Seiten eines Rechtecks kommensurabel sind, so giebt also das Produkt aus den Maßzahlen der Seiten an, in welcher Weise eine Fläche, die dem gegebenen Rechteck gleich ist, aus dem Quadrat über dem gemeinschaftlichen Maße der Seiten erhalten werden kann. Das Produkt aus den Maßzahlen der Seiten heißt deswegen

die Maſszahl des gegebenen Rechtecks oder das Verhältnis des gegebenen Rechtecks zu dem Quadrat über dem gemeinschaftlichen Maſse seiner Seiten oder der Quotient aus dem gegebenen Rechteck und diesem Quadrat.

2. Sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Seiten inkommensurabel sind (Fig. 151).

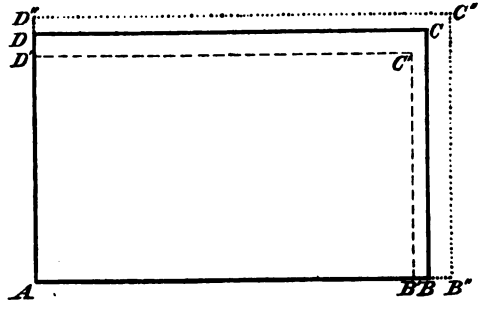


Fig. 151.

In diesem Falle ist keine der Seiten einem ganzzahligen Vielfachen der Strecke $\frac{M}{n}$ gleich, es muſs also angenommen werden:

$$M \cdot \frac{r}{n} < a < M \cdot \frac{r+1}{n} \quad \text{und} \quad M \cdot \frac{s}{n} < b < M \cdot \frac{s+1}{n}.$$

Sei nun:

$$AB' = M \cdot \frac{r}{n}, \quad AB'' = M \cdot \frac{r+1}{n}, \quad AD' = M \cdot \frac{s}{n},$$

$$AD'' = M \cdot \frac{s+1}{n},$$

so ergiebt sich:

$$AB'C'D' = M^2 \cdot \frac{rs}{n^2} \quad \text{und} \quad AB''C''D'' = M^2 \cdot \frac{(r+1)(s+1)}{n^2},$$

also:

$$AB''C''D'' - AB'C'D' = M^2 \cdot \frac{r+s+1}{n^2}.$$

Sind die Zahlen r und s beide gröſser als n, so kann jede von ihnen in die Summe aus einem Vielfachen von n

und einem Reste, der kleiner als n ist, zerlegt werden, beispielsweise:

$$r = nr' + \varrho, \quad s = ns' + \sigma,$$

woraus dann folgt:

$$r + s = n(r' + s') + (\varrho + \sigma).$$

Aus $\varrho < n$ und $\sigma < n$ ergiebt sich weiter:

$$\varrho + \sigma < 2n - 1, \quad \text{also:} \quad r + s + 1 < n(r' + s' + 2)$$

und

$$\frac{r+s+1}{n^2} < \frac{r'+s'+2}{n},$$

mithin auch:

$$AB''C''D'' - AB'C'D' < \frac{M^2}{n}(r' + s' + 2).$$

Man kann nun n so groſs wählen, daſs $\frac{M^2}{n}(r' + s' + 2)$ kleiner als eine beliebig klein gewählte, von vornherein vorgeschriebene Fläche ε wird. Trifft dies zu, so können die Rechtecke $AB''C''D''$ und $AB'C'D'$ nicht mehr von einander unterschieden werden; sie sind einander gleich. Da aber $AB'C'D' < ABCD < AB''C''D''$ ist, so ist auch das Rechteck $ABCD$ jeder seiner Grenzen gleich zu setzen. Dann muſs aber auch die Maſszahl des Rechtecks $ABCD$ mit den Maſszahlen seiner Grenzen identifiziert werden, sie ist also gleich $\frac{sr}{n^2}$. Berücksichtigt man nun, daſs die Maſszahlen der Seiten des Rechtecks beziehungsweise mit $\frac{r}{n}$ und $\frac{s}{n}$ zu identifizieren sind, so gelangt man wieder zu dem Ergebnis:

Die Maſszahl eines Rechtecks ist gleich dem Produkte der Maſszahlen seiner Seiten, vorausgesetzt daſs das Quadrat über dem Längenmaſse als Flächenmaſs gewählt wird.

3. Ist M das Längenmaſs, also M^2 das Flächenmaſs, so ist die Zahl 1 sowohl die Maſszahl für das Längenmaſs, als auch die Maſszahl für das Flächenmaſs. Man ist daher berechtigt, für M^2 das Zeichen 1 zu setzen. Die Gleichung

$$ABCD = M^2 \frac{rs}{n^2}$$

geht dann über in:

$$ABCD = \frac{rs}{n^2}.$$

In diesem Sinne ist eine Gleichung zu verstehen, die scheinbar die Gleichheit zwischen einer Fläche und einer Zahl ausspricht.

Der früher eingeführte Ausdruck ab bezeichnet somit die Fläche eines Rechtecks, wenn man unter a und b die Seiten versteht; er giebt aber die Maſszahl der Rechteckfläche an, wofern man mit a und b die Maſszahlen der Rechteckseiten bezeichnet. In abgekürzter Ausdrucksweise wird daher oft von dem Produkte zweier Seiten gesprochen, wenn das Produkt der Maſszahlen jener Seiten gemeint ist, und von einer Fläche statt von der Maſszahl der Fläche. So versteht man auch unter dem reziproken Werte einer Fläche den reziproken Wert ihrer Maſszahl.

Der Quotient aus der Maſszahl einer Rechteckfläche und der Maſszahl der einen Seite ist gleich der Maſszahl der andern; der Quotient aus der Maſszahl einer Fläche und der einer Linie ist also als Maſszahl einer Linie aufzufassen.

Die Quadratwurzel aus der Maſszahl eines Rechtecks ist die Maſszahl für die Seite eines Quadrats, welches jenem Rechteck gleich ist.

4. Es seien $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei beliebige Rechtecke, i und i' ihre Flächen; r und s, r' und s' die Maſszahlen ihrer Seiten für das Maſs M; ϱ und σ, ϱ' und σ' die Maſszahlen der Seiten für das Maſs μ.

Es ist:

$$i = M^2(rs); \quad i' = M^2(r's'); \quad i = \mu^2(\varrho\sigma); \quad i' = \mu^2(\varrho'\sigma'),$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{i}{rs} = \frac{i'}{r's'} \quad \text{und} \quad \frac{i}{\varrho\sigma} = \frac{i'}{\varrho'\sigma'},$$

oder:

$$i = i'\frac{rs}{r's'} \quad \text{und} \quad i = i'\frac{\varrho\sigma}{\varrho'\sigma'},$$

oder auch:

$$\frac{i}{i'} = \frac{rs}{r's'} \quad \text{und} \quad \frac{i}{i'} = \frac{\varrho\sigma}{\varrho'\sigma'}.$$

Man gelangt so zu dem Begriff der Maſszahl eines Rechtecks für ein anderes Rechteck als Maſs und zu dem Begriff des Verhältnisses und des Quotienten von zwei gegebenen Rechtecken. Die obigen Gleichungen veranlassen zu der Frage, ob dieser Begriff eindeutig sei.

Aus $i = M^2(rs)$ und $i = \mu^2(\varrho\sigma)$ folgt:

$$i(\varrho'\sigma') = M^2(rs\varrho'\sigma') \quad \text{und} \quad i(\varrho'\sigma') = \mu^2(\varrho\sigma\varrho'\sigma').$$

Aus $i' = M^2(r's')$ und $i' = \mu^2(\varrho'\sigma')$ ergiebt sich:

$$i'(\varrho\sigma) = M^2(r's'\varrho\sigma) \quad \text{und} \quad i'(\varrho\sigma) = \mu^2(\varrho\sigma\varrho'\sigma').$$

Somit sind die Flächen $i(\varrho'\sigma')$ und $i'(\varrho\sigma)$ gleich, mithin auch ihre Maſszahlen für das Maſs M^2, nämlich:

$$rs\varrho'\sigma' = r's'\varrho\sigma.$$

Hieraus aber folgt:

$$\frac{rs}{r's'} = \frac{\varrho\sigma}{\varrho'\sigma'}.$$

Der Quotient zweier Flächen ist somit ein eindeutiger Begriff.

Ähnlich wie früher kann auch bewiesen werden, daſs der Begriff des Quotienten zweier Flächen denselben Gesetzen gehorcht wie der Begriff des Quotienten zweier Zahlen.

5. Da der für die Rechteckfläche eingeführte Ausdruck ab zugleich die Maſszahl des Rechtecks bezeichnet, so sind auch die früher für das Parallelogramm, das Dreieck und das Trapezoid abgeleiteten Ausdrücke ohne weiteres als Bezeichnungen für die Maſszahlen dieser Flächen zu betrachten. Es ergeben sich daher die Sätze:

Die Maſszahl für die Fläche eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Maſszahl einer Seite und der Maſszahl der zugehörigen Höhe.

Die Maſszahl für die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus der Maſszahl einer Seite und der Maſszahl der zugehörigen Höhe.

Die Maſszahl für die Fläche eines Trapezoids ist gleich dem halben Produkte aus der Summe der Maſszahlen der Grundlinien und der Maſszahl der Höhe.

Überhaupt dürfen in allen Gleichungen die Zeichen, welche Flächen oder Strecken bezeichnen, als Maſszahlen

für die betreffenden Flächen, bez. Strecken, aufgefaßt werden. Umgekehrt darf auch jede Beziehung, die für gegebene Maßzahlen als richtig erkannt ist, auf die entsprechenden geometrischen Gebilde übertragen werden.

Übungen zu § 43.

1. Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der reziproken Werte der Kathetenquadrate gleich dem reziproken Werte des Höhenquadrats. (Der Satz ergiebt sich aus der pythagoreischen Gleichung und der Beziehung $ch_3 = ab$.)

2. Der reziproke Wert des Radius des Inkreises eines Dreiecks ist gleich der Summe der reziproken Werte der Radien der drei Ankreise. (§ 38, Übung Nr. 33.)

3. Die Strecke x soll aus folgenden Gleichungen konstruiert werden:

1) $x^2 = \sqrt{a^4 + b^4}$ 2) $x^2 = \sqrt{a^4 - b^4}$

3) $x^2 = \sqrt{\frac{a^2b^4 - b^2a^4}{c^2}}$ 4) $x^2 = \sqrt{\frac{b^6}{a^2} - \frac{a^6}{b^2}}$.

(Im ersten Falle ist:

$$x^2 = \sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)} = a\sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}},$$

im zweiten:

$$x^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} = \sqrt{(a+b)(a-b)}\ \sqrt{a^2 + b^2}.)$$

4. Zwei Strecken zu zeichnen, wenn das durch sie bestimmte Rechteck und die Differenz ihrer Quadrate zwei gegebenen Flächen beziehungsweise gleich sind.

5. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn man seine Höhe und die Differenz der Quadrate über den Kathetenprojektionen auf der Hypotenuse kennt.

6. Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Flächeninhalt einem gegebenen Quadrat gleich ist, und von dem außerdem gegeben sind:

1) $a^2 - b^2$, $a_3 \cdot b_3$ 2) $a_3^2 - b_3^2$, $a \cdot b$ 3) $s_1^2 - s_2^2$, $a \cdot b$

4) $s_1^2 - s_2^2$, $a_3 \cdot b_3$.

7. Welches ist die Maſszahl für den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a?

8. Welches ist die Maſszahl für den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Ecken auf drei gegebenen Parallelen liegen, für welche die Maſszahlen der Abstände bekannt sind? (Die Seite ist Hypotenuse in drei rechtwinkeligen Dreiecken, in denen je eine Kathete bekannt ist, während zwischen den übrigen Katheten eine einfache Beziehung besteht.)

9. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf drei gegebenen Parallelen liegen, und von dem eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht. (Siehe Nr. 8.)

§ 44. Proportionalität und Ähnlichkeit.

1. Wenn das Verhältnis von zwei gleichartigen Gröſsen (z. B. Strecken oder Flächen) gleich dem Verhältnis von zwei andern gleichartigen Gröſsen ist, so sagt man, die beiden erstern Gröſsen seien den beiden letztern proportioniert. Die Gleichung, welche ausdrückt, daſs eine solche Beziehung zwischen zwei Paaren von Gröſsen besteht, heiſst Proportion.

Es sei beispielsweise $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ eine gegebene Proportion.

Sind a, a', β und β' die Maſszahlen der Strecken a, a', b und b' für das Maſs M, so ist:

$$\frac{a}{a'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{oder} \quad a\beta' = \beta a'.$$

Nun ist aber $a\beta'$ die Maſszahl des Rechtecks ab' und $\beta a'$ die des Rechtecks ba' für das Maſs M^2, die genannten Rechtecke haben demnach gleiche Maſszahlen für dasselbe Maſs, also:

$$ab' = ba'.$$

Ist umgekehrt die Gleichung $ab' = ba'$ gegeben, so sind $a\beta'$ und $\beta a'$ die Maſszahlen der gleichen Rechtecke, folglich:

$$a\beta' = \beta a'.$$

Daraus folgt aber:

$$\frac{a}{a'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{\beta} = \frac{a'}{\beta'},$$

und hieraus wieder:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{bezw.} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Der Übergang von gleichen Verhältnissen zu gleichen Produkten und von gleichen Produkten zu gleichen Verhältnissen vollzieht sich in der Geometrie nach denselben Regeln wie in der Algebra.

Ist $c : b = a : x$ oder $x = \frac{ab}{c}$, so heißt x die vierte Proportionale zu a, b und c.

Besteht die Gleichung: $a : x = x : b$ oder $x^2 = ab$ oder $x = \sqrt{ab}$, so nennt man x die mittlere Proportionale zwischen a und b.

2. Der Ausdruck für drei oder mehr gleiche Verhältnisse $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$ heißt fortlaufende Proportion. Man sagt, die Größen, welche die Zähler bilden, seien den in den Nennern stehenden Größen proportioniert.

Ist k der Wert jedes der gegebenen Verhältnisse, so folgt $a = a' \cdot k$; $b = b' \cdot k$; $c = c' \cdot k$, also:

$$a \pm b \pm c = (a' \pm b' \pm c')\, k$$

und

$$\frac{a \pm b \pm c}{a' \pm b' \pm c'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

In Worten:

Ein beliebiges Aggregat der Zähler einer Proportion verhält sich zum entsprechenden Aggregate ihrer Nenner wie jeder Zähler zu seinem Nenner.

Es bestätigt sich also auch hier wieder, daß die geometrische und die algebraische Zeichensprache denselben Gesetzen unterworfen sind.

3. Es seien a und a', b und b' zwei Paare homologer Querstrecken in zwei beliebigen Streifen S und S' (Fig. 152).

Da je zwei Strecken ein bestimmtes Verhältnis im engern oder im weitern Sinne haben, so kann man für das eine Paar homologer Querstrecken ohne weiteres die Gleichungen ansetzen:

$$\frac{a}{a'} = \frac{p}{p'}; \quad a = M \cdot p; \quad a' = M \cdot p';$$

und zwar darf vorausgesetzt werden, daſs p und p' ganze Zahlen sind. Wenn man dann a in p und a' in p' gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte die Parallelen zu den Rändern zieht, so werden die gegebenen Streifen in p, beziehungsweise p', kongruente Streifen zerlegt (§ 22, Nr. 8).

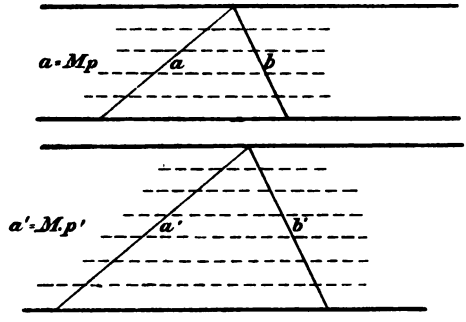


Fig. 152.

Dadurch zerfallen aber auch die Querstrecken b und b' in p, bez. p', gleiche Teile (§ 22, Nr. 6). Es giebt also ein Maſs, bezüglich dessen die Strecken b und b' beziehungsweise dieselben Maſszahlen besitzen wie a und a', d. h. es ist:

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

In Worten: Für zwei gegebene Streifen ist das Verhältnis homologer Querstrecken unveränderlich, oder: Das Verhältnis zweier Querstrecken eines Streifens ist gleich dem Verhältnis ihrer homologen Querstrecken in jedem andern Streifen.

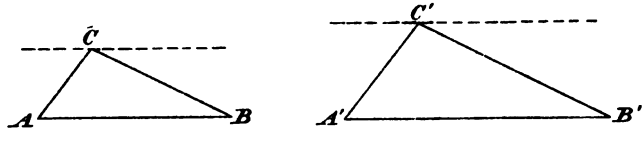


Fig. 153.

4. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei winkelgleiche Dreiecke, so ist nach § 38, Nr. 6 (Fig. 153):

$$ab' = ba', \text{ folglich auch: } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Da aber auch $bc' = cb'$ ist, so ergiebt sich weiter:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \text{ also: } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Oder: Zieht man in jedem der beiden Dreiecke durch die Scheitel gleicher Winkel die Parallelen zu den Gegenseiten, so bilden die übrigen Seiten zwei Paare homologer Querstrecken von zwei Streifen, also ergiebt sich nach Nr. 3:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Ebenso kann bewiesen werden, daß $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ist.

Sind nun n, p und q beziehungsweise die Maßzahlen von a, b und c; n', p' und q' die Maßzahlen von a', b' und c' für ein und dasselbe Maß M, so ergiebt sich aus der Proportion $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ die folgende:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}.$$

Andererseits ist:

$$a' = M \cdot n', \quad b' = M \cdot p', \quad c' = M \cdot q',$$

also auch:

$$a' = \frac{Mn'}{n} \cdot n, \quad b' = \frac{Mp'}{p} \cdot p, \quad c' = \frac{Mq'}{q} \cdot q.$$

Da aber $M \cdot \frac{n'}{n} = M \cdot \frac{p'}{p} = M \cdot \frac{q'}{q}$ ist, so giebt es ein Maß, bezüglich dessen die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ beziehungsweise dieselben Maßzahlen haben wie ihre homologen Seiten in dem Dreieck ABC. Hinsichtlich der Maßzahlen ihrer Winkel und ihrer Seiten brauchen daher winkelgleiche Dreiecke nicht unterschieden zu werden, man nennt sie deswegen ähnlich (in Zeichen: $\sim$). Das charakteristische Merkmal der Ähnlichkeit zweier Dreiecke ist ihre Winkelgleichheit.

5. ABC und $A'B'C'$ seien zwei beliebige Dreiecke (Fig. 154).

Wenn man auf CA die Strecke $CP = C'A'$ abträgt und durch P die Parallele PQ zu AB zieht, so ist:

$$ABC \sim PQC.$$

In dem Falle, daſs die Dreiecke PQC und $A'B'C'$ kongruent sind, ergiebt sich unmittelbar, daſs auch

$$ABC \sim A'B'C'$$

ist. Da die Dreiecke PQC und $A'B'C'$ in einer Seite

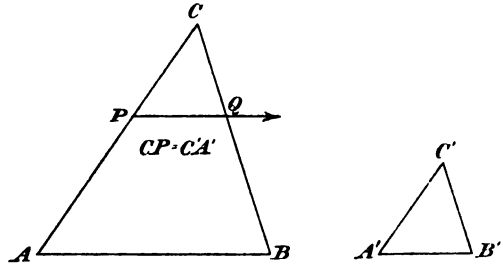


Fig. 154.

übereinstimmen, so sind sie kongruent, wenn auſserdem noch folgende Bedingungen erfüllt sind, entweder:

1) $CQ = C'B'$ und $\gamma = \gamma'$

oder

2) $\gamma = \gamma'$ und $\sphericalangle CPQ = \alpha'$

oder

3) $CQ = C'B'$ und $PQ = A'B'$

oder

4) $CQ = C'B'$, $\sphericalangle CQP = \beta'$ und $C'A' > C'B'$.

Für die Dreiecke PQC und ABC gilt nun folgende Bedingung:

$$\frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}.$$

Daher sind die Bedingungen für die Kongruenz der Dreiecke PQC und $A'B'C'$ mit den folgenden Bedingungen für die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ beziehungsweise identisch, entweder:

1) $\frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB}$ und $\gamma' = \gamma$

oder

2) $\gamma' = \gamma$ und $\alpha' = \alpha$

oder

$$3)\quad \frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB}$$

oder

$$4)\quad \frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB},\ \beta' = \beta \text{ und } CA > CB.$$

Ist eine dieser vier Bedingungen erfüllt, so ist:

$$ABC \sim A'B'C'.$$

Mithin ergeben sich die Sätze:

Zwei Dreiecke sind ähnlich: 1) wenn sie in einem Winkel übereinstimmen, dessen Anseiten proportioniert sind, 2) wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen, 3) wenn die Seiten des einen den Seiten des andern proportioniert sind, 4) wenn zwei Seiten des einen zwei Seiten des andern proportioniert und die Gegenwinkel der größern Seiten beider Dreiecke gleich sind.

Wendet man den vierten Satz auf zwei rechtwinkelige Dreiecke an, so nimmt er den folgenden Wortlaut an:

Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Katheten beider Dreiecke sich wie die Hypotenusen verhalten.

Kongruente Dreiecke sind ähnliche Dreiecke, für welche das Verhältnis homologer Seiten gleich eins ist.

6. Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei ähnliche Dreiecke.

Wenn man die Bezeichnungen für das Dreieck $A'B'C'$ aus den für das Dreieck ABC gewählten durch Hinzufügung eines Striches ableitet, so erhält man folgende Paare von ähnlichen Dreiecken:

$$1)\ CAH_3 \sim C'A'H_3' \quad 2)\ CAW_3 \sim C'A'W_3'$$
$$3)\ AUM_3 \sim A'U'M_3' \quad 4)\ BKC' \sim B'K'C''$$
$$5)\ BK_1C_1 \sim B'K_1'C_1' \quad 6)\ ACM_3 \sim A'C'M_3',$$

und zwar kommt bei den 5 ersten Paaren der zweite, bei dem letzten der erste Ähnlichkeitsatz in Betracht. Die Dreiecke ergeben der Reihe nach folgende Beziehungen:

$$1)\ \frac{h_3}{h_3'} = \frac{b}{b_3'} \qquad 2)\ \frac{w_3}{w_3'} = \frac{b}{b'}$$

$$3)\ \frac{r}{r'} = \frac{s_3}{s_3'} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}c'} = \frac{c}{c'} \qquad 4)\ \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{s-b}{s'-b'} = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'} = \frac{a}{a'}$$

$$5)\ \frac{\varrho_1}{\varrho_1'} = \frac{s-c}{s'-c'} = \frac{a}{a'}$$

$$7)\ \frac{m_3}{m_3'} = \frac{b}{b'};\ \sphericalangle(am_3) = (a'm_3');\ \sphericalangle(cm_3) = (c'm_3').$$

Wenn man in ähnlichen Dreiecken als homolog bezeichnet: 1) die Gegenseiten gleicher Winkel beider Dreiecke, 2) die Gegenecken homologer Seiten, 3) je zwei gleichartige ausgezeichnete Linien, die zu homologen Seiten oder Ecken gehören, 4) den Schnittpunkt zweier Strecken und den der homologen Strecken, 5) den Winkel zweier Strecken und den der homologen Strecken, 6) die Verbindungslinie zweier Punkte und die der homologen Punkte, so können die obigen Ergebnisse in folgendem Satze ausgesprochen werden:

Homologe Winkel ähnlicher Dreiecke sind gleich, und das Verhältnis homologer Strecken ist gleich dem Verhältnis homologer Seiten.

Aus einer ähnlichen Überlegung wie früher ergiebt sich weiter: Bezüglich des Maſses $\frac{Ma'}{a}$ haben alle Strecken des Dreiecks $A'B'C'$ beziehungsweise dieselben Maſszahlen wie die homologen Strecken des Dreiecks ABC. Wegen des Satzes in Nr. 2 hat man irgend ein Aggregat aus Strecken des einen Dreiecks und das entsprechende Aggregat aus den homologen Strecken des andern Dreiecks als homologe Strecken im Sinne des vorstehenden Satzes aufzufassen. Werden die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ so gelegt, daſs sie den Winkel γ gemein haben und zwei homologe Anseiten dieses Winkels in derselben Geraden liegen, so erkennt man leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Ähnliche Dreiecke können mit einem gemeinschaftlichen Winkel so aufeinander gelegt werden, daſs je zwei homologe Punkte mit dem Scheitel des

gemeinschaftlichen Winkels in einer und derselben Geraden liegen, und homologe Strecken in eine und dieselbe Gerade fallen oder parallel sind.

7. Wenn man in dem Dreieck ABC durch A und B die Parallelen zu $CW_3 (CW_3')$ zieht (Fig. 155), so lehrt der Streifensatz:

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{CD}{b} \left(\frac{a_3'}{b_3'} = \frac{CD'}{b}\right).$$

Da aber die Winkel CBD und CDB den Hälften von γ ($CD'B$ und CBD' den Hälften des Nebenwinkels von γ)

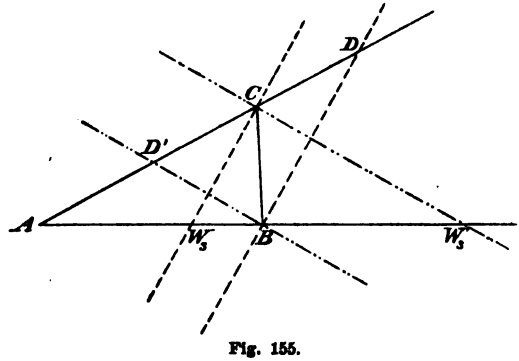


Fig. 155.

beziehungsweise gleich sind, so sind $CD (CD')$ und CB antiparallele Querstrecken desselben Streifens; folglich geht die obige Proportion in die folgende über:

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a}{b} \left(\frac{a_3'}{b_3'} = \frac{a}{b}\right).$$

(Siehe § 39, Übung Nr. 15.) In Worten:

Die Halbierungslinie eines Winkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Derselbe Wortlaut kann für die Halbierungslinie eines Außenwinkels Anwendung finden, wofern man nur übereinkommt, jeden Punkt der Verlängerung einer Strecke als Teilpunkt der Strecke zu bezeichnen und demgemäß zwischen einer äußern Teilung und einer innern Teilung einer Strecke zu unterscheiden.

Die Fufspunkte der Winkelhalbierenden, die von derselben Ecke ausgehen, teilen die Gegenseite innen und aufsen in demselben Verhältnis. Diese Teilung wird harmonische Teilung genannt.

Dafs die Fufspunkte der Winkelhalbierenden die einzigen Punkte auf AB sind, die AB in dem Verhältnis der anliegenden Seiten teilen, ergiebt sich wie folgt: Sind X und Y zwei innere oder zwei äufsere Teilpunkte auf derselben Verlängerung der gegebenen Strecke, und ist $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{BY}$, so ergiebt sich ohne weiteres:

$$\frac{AX}{AY} = \frac{BX}{BY} = \frac{AX \pm BX}{AY \pm BY} = \frac{AB}{AB}, \text{ mithin } AX = AY.$$

8. Wenn man die Seite AB des Dreiecks ABC als Querstrecke eines beliebigen Streifens betrachtet und durch

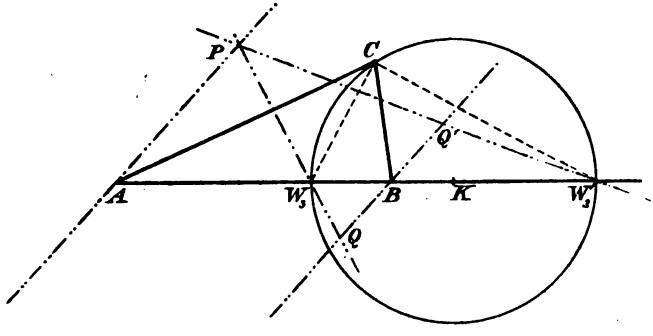


Fig. 156.

W_3 eine beliebige Gerade zieht (Fig. 156), so besteht für die auf den Rändern bestimmten Abschnitte die Bedingung:

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AW_3}{BW_3}.$$

Die Gerade PW_3' bestimmt einen weitern Randabschnitt, der der Gleichung genügt:

$$\frac{AP}{BQ'} = \frac{AW_3'}{BW_3'}.$$

Da aber nach dem Satze der vorstehenden Nummer $\frac{b_3}{a_3} = \frac{b_3'}{a_3'}$ ist, so folgt:

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AP}{BQ'}, \text{ mithin: } BQ' = BQ.$$

Die Figur kann hergestellt werden, wenn man von dem Dreieck ABC die Seite c und das Verhältnis der beiden andern kennt:

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{p}.$$

Trägt man $AP = p$ und $BQ = BQ' = q$ auf zwei beliebigen Parallelen ab, die beziehungsweise durch A und B gelegt werden, so werden die Punkte W_3 und W_3' durch die Geraden PQ und PQ' auf AB bestimmt. Da nun $\sphericalangle W_3 C W_3' = R$ ist, so ist der Kreis, der $W_3 W_3'$ als Durchmesser hat, ein Ort für die Ecke C. Dieser Kreis heißt der zu c gehörige Apollonische Kreis des Dreiecks ABC. So ergiebt sich der Satz:

Kennt man von einem Dreieck eine Seite und das Verhältnis der beiden andern, so ist der zu der gegebenen Seite gehörige Apollonische Kreis ein Ort für die dritte Ecke des Dreiecks.

9. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei beliebige Dreiecke, so ist:

$$i = \frac{1}{2} c h_3 \quad \text{und} \quad i' = \frac{1}{2} c' h_3', \quad \text{also:} \quad \frac{i}{i'} = \frac{c h_3}{c' h_3'}.$$

Ist $c = c'$, so geht die erhaltene Gleichung über in:

$$\frac{i}{i'} = \frac{h_3}{h_3'},$$

und für $h_3 = h_3'$ erhält man:

$$\frac{i}{i'} = \frac{c}{c'}.$$

Stimmen die Dreiecke in dem Winkel α überein, so ergiebt sich:

$$\frac{h_3}{h_3'} = \frac{b}{b'}, \text{ also: } \frac{c h_3}{c' h_3'} = \frac{bc}{b'c'} \quad \text{und} \quad \frac{i}{i'} = \frac{bc}{b'c'}.$$

Sind die betrachteten Dreiecke ähnlich, so ist:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \text{ also: } \frac{bc}{b'c'} = \frac{c^2}{c'^2} \text{ und } \frac{i}{i'} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

Die erhaltenen Sätze lauten in Worten:

Dreiecke, die in einer Seite (Höhe) übereinstimmen, verhalten sich wie die zugehörigen Höhen (Seiten).

Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Rechtecke aus dessen Anseiten.

Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Strecken.

Man sieht ohne weiteres ein, dafs die beiden ersten Sätze auf Parallelogramme übertragbar sind.

Übungen zu § 44.

1. Zwei Paare proportionierter Strecken zu zeichnen.

2. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu zeichnen. Mit welcher Rechteckskonstruktion ist diese Aufgabe identisch?

3. Die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Strecken zu zeichnen. Mit welcher Quadratkonstruktion ist die Aufgabe identisch?

4. Zwei Strecken zu zeichnen, deren Summe (Differenz) einer gegebenen Strecke, und deren Verhältnis dem Verhältnis von zwei gegebenen Strecken gleich ist.

5. Ein Rechteck aus dem Verhältnis zweier Anseiten und dem Umfange (Inhalte) zu zeichnen.

6. Wenn eine Gerade, die zwei feste Streifen mit gemeinschaftlichem Rande schneidet, sich um einen festen Punkt dreht, so bleibt das Verhältnis der auf ihr liegenden Querstrecken beider Streifen unverändert.

7. Wenn zwei Winkel, die den Scheitel gemein haben, von zwei Parallelen geschnitten werden, so bleibt das Verhältnis der durch die Schenkel auf beiden Parallelen bestimmten Abschnitte von einem Winkel zum andern unverändert.

8. Durch einen gegebenen Punkt eine Sekante an einen gegebenen Kreis so zu ziehen, daſs ihre Abschnitte sich wie zwei gegebene Strecken verhalten.

9. Durch einen gegebenen Punkt auf einem von zwei konzentrischen Kreisen eine Gerade so zu ziehen, daſs die Sehnen, die auf ihr durch die Kreise bestimmt werden, sich wie zwei gegebene Strecken verhalten.

10. Durch einen gegebenen Punkt an zwei konzentrische Kreise eine Sekante so zu ziehen, daſs die von dem kleinern Kreise ausgeschnittene Sehne zu den von dem Ringe bestimmten Abschnitten in einem gegebenen Verhältnis steht.

11. Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade so zu ziehen, daſs die auf ihr von zwei gegebenen Geraden bestimmte Strecke AB durch den gegebenen Punkt in einem gegebenen Verhältnis geteilt wird. (Man ziehe die Verbindungslinie des gegebenen Punktes und des Schnittpunktes S der gegebenen Geraden und betrachte die Streifen, die durch SA und die Parallelen zu SA durch P und B bestimmt werden.)

12. Durch einen Schnittpunkt von zwei gegebenen Kreisen eine Sekante so zu ziehen, daſs die von den Kreisen bestimmten Sehnen ein gegebenes Verhältnis haben. (Die Achsen der beiden Sehnen und die zu ihnen durch den Schnittpunkt der Kreise gezogene Parallele bestimmen zwei Streifen, in denen die Abschnitte der Centrale homologe Querstrecken sind.)

13. Gegeben ein Kreis und eine Gerade. Eine zu der Geraden senkrechte Sekante so zu ziehen, daſs die von dem Fuſspunkte der Sekante mit ihren Kreispunkten bestimmten Abschnitte ein gegebenes Verhältnis haben.

14. Durch den Schnittpunkt von zwei gegebenen Kreisen eine Sekante so zu legen, daſs ihre Kreispunkte eine nach dem goldenen Schnitte geteilte Strecke bestimmen.

15. Auf der Seite eines Dreiecks ein Lot so zu errichten, daſs der im Dreieck liegende Abschnitt des Lotes die mittlere Proportionale zwischen den Seitenabschnitten wird, die sein Fuſspunkt bestimmt.

16. Von einem Dreieck kennt man die Differenz der Quadrate zweier Seiten und die Differenz ihrer Projektionen

auf der dritten Seite: diese soll gezeichnet werden. (Es ist: $b^2 - a^2 = b_3^2 - a_3^2$.)

17. Die vier Ecken zweier Ergänzungsparallelogramme, welche der gemeinschaftlichen Ecke benachbart sind, bestimmen ein Trapezoid.

18. Die Seiten von gleichen Rechtecken sind für jeden Winkel Seiten von Ergänzungsparallelogrammen.

19. In jedem Dreieck ist das Verhältnis zweier Höhen zu dem Verhältnis der zugehörigen Seiten reziprok.

20. Die Seiten eines Dreiecks sind den Rechtecken aus den nicht zugehörigen Höhen proportioniert.

21. Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, und zwei Seiten des einen Dreiecks zwei Höhen des andern beziehungsweise gleich sind: in welcher Beziehung steht die dritte Seite des ersten Dreiecks zu den Höhen des zweiten? (Sie ist die vierte Proportionale zu jenen beiden Höhen und der dritten.)

22. Durch die Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks werden die Gegenseiten so geteilt, daſs die Summe der reziproken Werte von drei Abschnitten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich der Summe der reziproken Werte der drei übrigen Abschnitte ist. (Man drücke die Abschnitte durch die Seiten aus.)

23. Die Fuſspunkte der Halbierungslinien der Auſsenwinkel teilen die zugehörigen Seiten so, daſs die Summe der reziproken Werte der auf der gröſsten und auf der kleinsten Seite liegenden Abschnitte gleich der Summe der reziproken Werte der Abschnitte auf der mittlern Seite ist.

24. Welches sind die Maſszahlen für die Radien der Apollonischen Kreise eines Dreiecks, wenn die Maſszahlen der Seiten gegeben sind?

25. In jedem Dreieck ist die Summe aus den reziproken Werte der Durchmesser derjenigen Apollonischen Kreise, die zu der gröſsten und der kleinsten Dreieckseite gehören, gleich dem reziproken Werte des Durchmessers des zu der mittlern Seite gehörigen Apollonischen Kreises.

26. Ein Dreieck aus dem Radius eines seiner Apollonischen Kreise und den beiden nicht zugehörigen Seiten zu konstruieren.

27. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn man das Rechteck aus zwei Seiten, die Differenz der Quadrate dieser Seiten und den zur dritten Seite gehörigen Apollonischen Kreis kennt.

28. Welches ist der Ort für alle Punkte, von denen aus zwei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden? (Die Mittelpunktsabstände jedes Punktes sind die Hypotenusen von ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken.)

29. Einen Punkt zu zeichnen, dessen Abstände von den Ecken eines gegebenen Dreiecks drei gegebenen Strecken (z. B. den Gegenseiten) proportioniert sind.

30. Einen Punkt zu finden, von dem aus drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden.

31. Einen Punkt zu zeichnen, von dem aus an drei gegebene Kreise Tangenten gehen, die den Radien proportioniert sind. (Siehe Nr. 28.)

32. Wenn die Zifferblätter von zwei gleichmäßig gehenden Uhren verschiedener Größe so in derselben Ebene liegen, daß die Durchmesser, welche die Zahlen 12 und 6 verbinden, parallel sind, und die eine Uhr gegen die andere um sechs Stunden vorgeht, so dreht sich sowohl die Verbindungslinie der Endpunkte der großen, als auch die der Endpunkte der kleinen Zeiger um einen festen Punkt der Ebene.

33. Wenn eine Strecke durch die Endpunkte einer zweiten harmonisch geteilt wird, so wird auch die zweite durch die Endpunkte der ersten harmonisch geteilt.

34. Wie groß ist der gemeinschaftliche Teil von zwei Strecken a und b, wenn jede von ihnen durch die Endpunkte der andern harmonisch geteilt wird?

35. An alle Kreise, die durch zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks gelegt werden können, gehen von dem Mittelpunkte des zugehörigen Apollonischen Kreises aus gleiche Tangenten. (Vgl. § 40, Übungen Nr. 9 und 10.)

36. Die Abstände des Schnittpunktes der Mittellinien von den beiden Punkten, die eine Dreieckseite in drei gleiche Teile teilen, verhalten sich wie die beiden übrigen Seiten des Dreiecks.

37. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Ecken auf den Seiten eines gegebenen Dreiecks liegen.

38. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn der Flächeninhalt des zur Seite c gehörigen, eingeschriebenen Quadrats einem gegebenen Rechteck gleich ist, und man außerdem kennt;

I. 1) i 2) $c + h_3$.

II. 1) a 2) γ 3) a 4) h_1 5) m_1 6) m_3 7) $b_3 \pm a_3$ 8) $b^2 \pm a^2$ 9) $a + b$ 10) $\beta - a$.

39. Einem gegebenen Dreieck ein Rechteck von gegebenem Flächeninhalt einzuschreiben. In welcher Beziehung muſs die gegebene Fläche zu dem Inhalte des gegebenen Dreiecks stehen, damit die Aufgabe möglich sei? Welches ist das gröſste Rechteck, das einem gegebenen Dreieck eingeschrieben werden kann?

40. Von einem gegebenen Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite den n^{ten} Teil abzuschneiden.

41. Durch zwei Parallelen zu einer Seite ein gegebenes Dreieck in drei gleiche Teile zu teilen. (Die Parallelen bestimmen zwei Dreiecke, die dem gegebenen ähnlich sind.)

42. Durch eine Gerade ein gegebenes Dreieck in zwei gleiche Teile zu teilen, die gleiche Umfänge haben. (Man berechne die Abschnitte, welche die Gerade auf zwei Seiten bestimmt.)

43. Ein Dreieck soll durch zwei Parallelen zu derselben Seite in drei Teile geteilt werden, die drei gegebenen Strecken proportioniert sind.

44. Ein Dreieck durch eine Gerade so zu teilen, daſs beide Teile bei gleichem Umfange in einem gegebenen Verhältnis stehen. (Man drücke das Verhältnis des einen Teiles zu dem gegebenen Dreieck aus.)

45. Durch eine Gerade soll von einem gegebenen Dreieck ein gleichschenkeliges abgeschnitten werden, das zu jenem in einem gegebenen Verhältnis steht.

46. Ein Trapezoid soll durch eine Parallele zu den Grundlinien in einem gegebenen Verhältnis geteilt werden. (Bringt man die Schenkel zum Durchschnitt, so erhält man drei ähnliche Dreiecke.)

Vorbemerkung. Wenn unter den Angaben für die Konstruktion eines Dreiecks das Verhältnis von Strecken vorkommt, so sind folgende Fälle zu unterscheiden: 1) Man kennt das Verhältnis von zwei Strecken und die eine von ihnen, 2) zwei oder drei Strecken des gesuchten Dreiecks sind zwei, beziehungsweise drei, gegebenen Strecken proportioniert, und ein bestimmtes Aggregat jener Strecken einer gegebenen Strecke gleich, 3) von zwei Strecken, die

einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, ist das Verhältnis gegeben, und von den nicht gemeinschaftlichen Endpunkten der Abstand, 4) unter den Angaben befinden sich zwei, mit Hilfe deren man ein Dreieck zeichnen kann, welches dem gesuchten Dreieck oder einem Hilfsdreieck ähnlich ist. (Siehe die Ähnlichkeitsätze.) Im ersten Falle ist die zweite Strecke als vierte Proportionale konstruierbar; im zweiten Falle ist jede der in Frage stehenden Strecken als vierte Proportionale konstruierbar; im dritten Falle sind von dem Dreieck, das durch die Endpunkte der beiden Strecken bestimmt wird, zwei Ecken konstruierbar, und der zugehörige Apollonische Kreis ist ein Ort für die dritte Ecke; im vierten Falle denke man sich das konstruierbare Dreieck so auf das ihm ähnliche gelegt, daß beide einen Winkel und ein Paar homologer Schenkel dieses Winkels gemein haben, und suche mit Hilfe von bekannten Lehrsätzen und Aufgaben für die noch nicht bestimmten Punkte Orte abzuleiten.

47. Ein Dreieck aus folgenden Angaben zu zeichnen, wenn die Angaben $\frac{a}{b}$ und $a:b:c$ bedeuten, daß a und b zwei gegebenen Strecken und a, b und c drei gegebenen Strecken proportioniert sind:

I. 1) $\frac{a}{b}, \gamma$ 2) a, β 3) $a:b:c$ 4) $\frac{a}{b}, \beta$.

II. 1) a 2) c 3) h_1 4) h_3 5) m_1 6) m_3 7) w_1 8) w_3 9) w_1' 10) w_3' 11) r 12) ϱ 13) ϱ_1 14) ϱ_3 15) $b \pm a$ 16) $c \pm a$ 17) $2s$ 18) $b + c - a$ 19) $b_3 \pm a_3$ 20) $\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3$ 21) $\mathfrak{b}_3' + \mathfrak{a}_3'$ 22) $m_3 \pm h_3$ 23) $h_3 \pm \varrho$ 24) $h_1 \pm \varrho_1$ 25) $r \pm \varrho$ 26) $\varrho_2 \pm r$ 27) i.

48. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem man kennt:

I. 1) $c, \frac{a}{b}$ 2) $c, \frac{h_1}{h_2}$ 3) $c, \frac{a_2}{b_1}$ 4) $c, \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{b}_3}$ 5) $c, \frac{\mathfrak{a}_3'}{\mathfrak{b}_3'}$ 6) $c, \mathfrak{b}_3' - \mathfrak{b}_3$ 7) $c, \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3'$.

II. 1) a 2) a 3) γ 4) $\beta - a$ 5) m_1 6) m_3 7) h_1 8) h_3 9) w_3 10) w_3' 11) b_3 12) $b_3 \pm a_3$ 13) s_3 14) r 15) $\varrho_1 + \varrho_2$ 16) $\varrho_3 - \varrho$ 17) $r + s_3$ 18) $r - s_3$ 19) $b^2 \pm a^2$ 20) i.

49. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1) $i, \frac{c}{h_3}, \beta - \alpha$ 2) $\frac{m_3}{h_3}, r, b_3 \pm a_3$ 3) $\frac{m_3}{h_3}, c, i$ 4) $\frac{w_3}{h_3}, c, w_3'$ 5) $\frac{w_3'}{h_3}, c, w_3$ 6) $\frac{w_3}{h_3}, c, b_3 - a_3$ 7) $\frac{w_3'}{h_3}, c, a_3' + b_3'$ 8) $\frac{a}{h_3}, c, a \pm b$ 9) h_1, h_2, h_3.

50. Aus folgenden Angaben ein Dreieck zu zeichnen:

I. 1) $\frac{m_1}{m_2}, \sphericalangle(m_1 m_2)$ 2) $\frac{c}{m_1}, \sphericalangle(m_1 m_2)$ 3) $m_1 : m_2 : c$.

II. 1) $m_1 \pm m_2$ 2) m_3 3) h_3 4) $b_3 \pm a_3$ 5) i.

51. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

I. 1) $\frac{m_3}{h_3}, \beta - \alpha$.

II. 1) w_3 2) w_3' 3) c 4) r 5) s_3 6) $b_3 - a_3$ 7) $b_3' + a_3'$ 8) $b_3 \pm a_3$ 9) $m_3 \pm h_3$.

52. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn man kennt:

I. 1) $\frac{w_3}{h_3}, c$ 2) $\frac{w_3'}{h_3}, c$.

II. 1) a 2) γ 3) $\frac{b}{a}$ 4) r 5) $b_3' - b_3$ 6) i.

53. Ein Dreieck aus folgenden Angaben zu konstruieren:

I. 1) $c, \frac{m_1}{m_2}$ 2) $c, \frac{m_3}{m_2}$.

II. 1) b 2) $\frac{a}{b}$ 3) m_1 4) m_3 5) $\sphericalangle(c m_3)$ 6) $\sphericalangle(m_1 m_2)$ 7) h_1 8) h_3 9) c_1 10) $m_1^2 \pm m_2^2$ 11) i.

54. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

I. 1) $c, \frac{s_1}{s_2}$.

II. 1) a 2) γ 3) h_1 4) b_3 5) c_1 6) $b_3 \pm a_3$ 7) $s_1^2 \pm s_2^2$ 8) $b^2 - a^2$ 9) $b_3^2 - a_3^2$.

55. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn man kennt:

I. 1) $c, \frac{a}{m_1}$.

II. 1) b 2) γ 3) h_1 4) h_3 5) m_3 6) $\sphericalangle (cm_1)$ 7) $\sphericalangle (am_3)$ 8) $b_3 \pm a_3$ 9) a_3 10) c_1 11) $b^2 - a^2$ 12) $s_1^2 - s_2^2$ 13) $b_3^2 - a_3^2$ 14) i.

56. Aus folgenden Angaben ein Dreieck zu konstruieren:

I. 1) $\frac{c}{r}$ 2) $\frac{c}{s_3}$ 3) $\frac{r}{s_3}$.

II. 1) $c \pm r, h_3$ 2) $c \pm s_3, b_3 \pm a_3$ 3) $r \pm s_3, b_3 - a_3$ 4) $c \pm r, b_3' + a_3'$ 5) $h_3 - s_3, b_3 \pm a_3$ 6) $b_3 \pm a_3, \beta - \alpha$ 7) i, h_3.

§ 45. Metrische Beziehungen im Dreieck.

1. Durch seine drei Seiten ist das Dreieck bestimmt, folglich auch jede seiner ausgezeichneten Linien und jeder seiner Radien. Es liegt daher die Vermutung nahe, daſs auch die Maſszahlen dieser Strecken berechnet werden können, wenn die Maſszahlen der Seiten gegeben sind.

Für die Mittellinie m_3 wurde bereits früher gefunden:

$$m_3^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Wenn man die Bezeichnungen für die Ecken derart ändert, daſs von den Buchstaben A, B, C jeder an die Stelle des folgenden, der letzte an die des ersten gesetzt wird, so tritt dieselbe Vertauschung bei den Bezeichnungen für die Winkel und die Seiten und eine entsprechende bei den Zeigern der ausgezeichneten Linien und der Radien der Ankreise ein. Diese Vertauschung heiſst cyklisch. Durch cyklische Vertauschung erhält man folgende Werte für m_1 und m_2:

$$m_1^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \quad m_2^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

2. Für die Höhe h_3 erhält man zunächst den Ausdruck:

$$h_3^2 = b^2 - b_3^2 = (b + b_3)(b - b_3).$$

Nun ist aber:

$$b_3^2 - a_3^2 = b^2 - a^2 \quad \text{und} \quad b_3 + a_3 = c,$$

folglich:

$$b_3 - a_3 = \frac{b^2 - a^2}{c} \quad \text{und} \quad b_3 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Somit ergiebt sich:

$$b + b_3 = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2c}$$

$$b - b_3 = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2c}$$

$$h_3^2 = b^2 - b_3^2 = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}.$$

Setzt man: $a + b + c = 2s$, so ist:

$$-a + b + c = 2(s-a); \quad a - b + c = 2(s-b);$$
$$a + b - c = 2(s-c);$$

folglich:

$$h_3^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2};$$

$$h_3 = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Durch cyklische Vertauschung erhält man die entsprechenden Werte für h_1 und h_2.

3. Aus $i = \frac{1}{2} c h_3$ ergiebt sich sofort:

$$i = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nun ist aber:

$$\varrho s = i; \quad \varrho_1 (s-a) = i; \quad \varrho_2 (s-b) = i; \quad \varrho_3 (s-c) = i;$$

folglich können auch die Radien der Berührungskreise unmittelbar durch die Seiten ausgedrückt werden. Weiter ergiebt sich aus den vier letzten Gleichungen:

$$i^4 = \varrho\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, s(s-a)(s-b)(s-c);$$

folglich:

$$i = \sqrt{\varrho\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3}.$$

4. Das Dreieck AUM_3 stimmt mit ABC in einem Winkel überein (Fig. 157) Wird sein Inhalt durch i_3 bezeichnet, so ergiebt sich daher (§ 44, 9):

$$\frac{i_3}{i} = \frac{rs_3}{ab} = \frac{crs_3}{abc}.$$

Addiert man diese Gleichung zu den beiden, die aus ihr

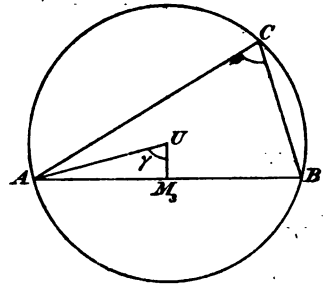


Fig. 157.

durch cyklische Vertauschung entstehen, und berücksichtigt man, daſs $i_1 + i_2 + i_3 = \frac{i}{2}$ ist, so folgt:

$$\frac{r}{abc}(as_1 + bs_2 + cs_3) = \frac{1}{2}.$$

Nun ist aber:

$$as_1 + bs_2 + cs_3 = 2i,$$

folglich:

$$r = \frac{abc}{4i}.$$

5. Der Umkreis des Dreiecks ABC (Fig. 158) werde durch die Winkelhalbierenden w_3 und w_3' in D und D' geschnitten, dann ist:

$$ACW_3 \sim BCD \sim BDW_3.$$

Die beiden ersten Dreiecke ergeben:

$$(w_3 + DW_3)\, w_3 = ab,$$

das erste und das dritte:

$$w_3 \cdot DW_3 = a_3 b_3,$$

also folgt:

$$w_3^2 = ab - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACW_3', BCD' und $BD'W_3'$ ergiebt sich in entsprechender Weise:

$$w_3'^2 = \mathfrak{a}_3'\mathfrak{b}_3' - ab.$$

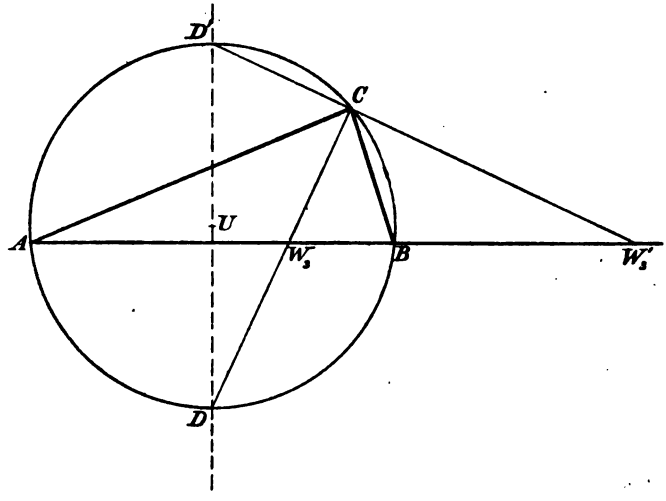


Fig. 158.

Weiter ist (§ 44, 2):

$$\frac{\mathfrak{a}_3}{a} = \frac{\mathfrak{b}_3}{b} = \frac{c}{a+b} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{a}_3'}{a} = \frac{\mathfrak{b}_3'}{b} = \frac{c}{b-a},$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3}{ab} = \frac{c^2}{(a+b)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{a}_3'\mathfrak{b}_3'}{ab} = \frac{c^2}{(a-b)^2},$$

also auch:

$$w_3^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\,\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c)$$

$$w_3'^2 = \frac{abc^2}{(a-b)^2} - ab = ab\,\frac{c^2-(a-b)^2}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{ab}{(a-b)^2}(c+a-b)(c-a+b).$$

Nach Einführung des halben Umfanges ergiebt sich schliefslich:

$$w_3 = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab\,s(s-c)} \qquad w_3' = \frac{2}{a-b}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}.$$

Ähnliche Werte ergeben sich durch cyklische Vertauschung für w_1, w_2, w_1', w_2'.

6. In § 35, 7 ergab sich:

$$s_3 = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} - r.$$

Nun ist:

$$\varrho_1+\varrho_2 = i\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\right) = \frac{ci}{(s-a)(s-b)} \quad \text{und} \quad r = \frac{abc}{4i},$$

folglich:

$$s_3 = \frac{ci}{2(s-a)(s-b)} - \frac{abc}{4i} = \frac{2sc(s-c)-abc}{4i}$$

$$= \frac{c[2s(s-c)-ab]}{4i}.$$

Es ist aber:

$$2s(s-c) = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2},$$

folglich:

$$s_3 = \frac{c[(a+b)^2-c^2-2ab]}{8i}$$

und schliefslich:

$$s_3 = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8i}.$$

Die Werte für s_1 und s_2 ergeben sich durch cyklische Vertauschung.

7. Auch die Centralen, welche den Mittelpunkt des Umkreises mit den Mittelpunkten der Berührungskreise verbinden, können nun mittelbar durch die Seiten ausgedrückt werden.

Da der Winkel UCJ (Fig. 159) als halbe Differenz von zwei Dreieckswinkeln spitz ist, so ergiebt der allgemeine pythagoreische Lehrsatz:

$$\overline{UJ}^2 = r^2 + \overline{CJ}^2 - 2r \cdot CD.$$

Fällt man von J das Lot JE auf CH_3, und berück-

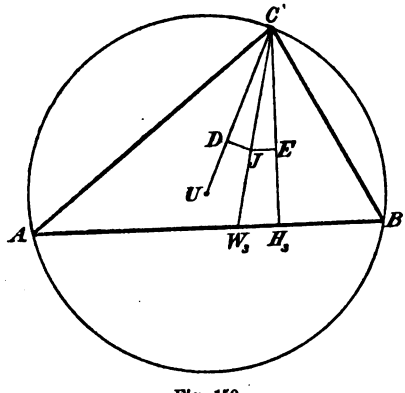


Fig. 159.

sichtigt man, daſs der Winkel UCH_3 durch CJ halbiert wird, so ergiebt sich:

$$CD = CE = h_3 - \varrho.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CEJ und CH_3W_3 folgt aber:

$$\frac{CJ}{w_3} = \frac{CE}{h_3} = \frac{h_3 - \varrho}{h_3} = \frac{2h_3 s - 2\varrho s}{2h_3 s} = \frac{2h_3 s - ch_3}{2h_3 s} = \frac{a+b}{2s},$$

also:

$$CJ = \frac{(a+b)\,w_3}{2s}.$$

Da nun $w_3 = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$ und $r = \frac{abc}{4i}$ ist, erhält man:

$$\overline{UJ}^2 = r^2 + \frac{ab(s-c)}{s} - \frac{abch_3(a+b)}{4is}$$

$$= r^2 + \frac{ab(s-c)}{s} - \frac{ab(a+b)}{2s} = r^2 - \frac{abc}{2s}.$$

Wegen $abc = 4ri = 4r\varrho s$ ergiebt sich schließlich:

$$\overline{UJ}^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

Für die übrigen Centralen findet man auf ähnlichem Wege:

$\overline{UK_1}^2 = r^2 + 2r\varrho_1$; $\overline{UK_2}^2 = r^2 + 2r\varrho_2$ und $\overline{UK_3}^2 = r^2 + 2r\varrho_3$.

8. Die Abstände des Mittelpunktes eines Berührungskreises von den Ecken besitzen Maßzahlen, deren Produkt

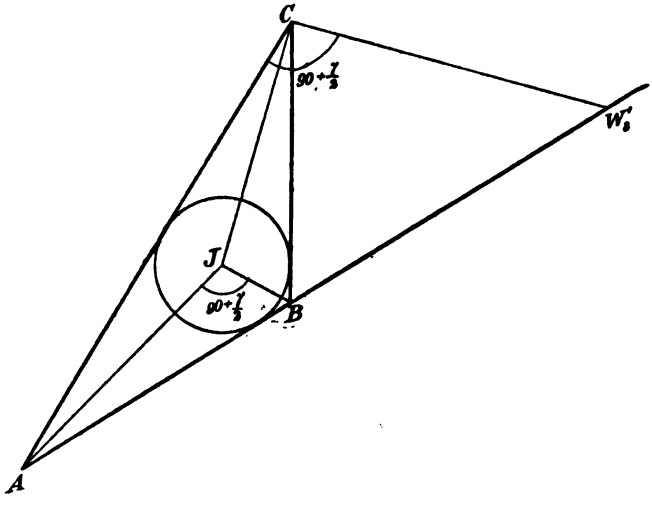


Fig. 160.

eine einfache Beziehung zu dem Radius dieses Berührungskreises und dem des Umkreises hat.

Da $AJB = ACW_3' = 90 + \frac{\gamma}{2}$ ist (Fig. 160), so stimmen die Dreiecke AJB und ACW_3' in einem Winkel überein, folglich:

$$\frac{AJB}{ACW_3'} = \frac{AJ \cdot BJ}{b \cdot w_3'} \quad \text{und} \quad AJ \cdot BJ = bw_3' \frac{AJB}{ACW_3'}.$$

Es ist aber:

$$AJB = \frac{c\varrho}{2} \quad \text{und} \quad ACW_3' = \frac{b_3' h_3}{2} = \frac{h_3 bc}{2(b-a)} = \frac{bi}{b-a},$$

folglich:

$$AJ \cdot BJ = \frac{c\varrho(b-a)w_3'}{2i} = \frac{c(b-a)w_3'}{2s} = \frac{c}{s}\sqrt{ab(s-a)(s-b)}.$$

Durch cyklische Vertauschung erhält man:

$$BJ \cdot CJ = \frac{a}{s}\sqrt{bc(s-b)(s-c)} \text{ und } CJ \cdot AJ = \frac{b}{s}\sqrt{ca(s-c)(s-a)}.$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen ergiebt sich weiter:

$$\overline{AJ}^2 \cdot \overline{BJ}^2 \cdot \overline{CJ}^2 = \frac{abc}{s^3}\sqrt{a^2b^2c^2(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2} = \frac{a^2b^2c^2i^2}{s^4},$$

also:

$$AJ \cdot BJ \cdot CJ = \frac{abci}{s^2},$$

und wegen $abc = 4ri$ ergiebt sich schliefslich:

$$AJ \cdot BJ \cdot CJ = 4r\varrho^2.$$

Auf ähnlichem Wege ergiebt sich:

$$AK_1 \cdot BK_1 \cdot CK_1 = 4r\varrho_1^2,$$

hieraus aber wieder durch cyklische Vertauschung die entsprechenden Beziehungen für K_2 und K_3.

9. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AH_1B und CH_3B ergiebt sich:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{a_3}{a}.$$

Durch cyklische Vertauschung erhält man weiter:

$$\frac{a_2}{a} = \frac{b_1}{b} \text{ und } \frac{b_3}{b} = \frac{c_2}{c}.$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen ergiebt sich schliefslich:

$$c_1 a_2 b_3 = a_3 b_1 c_2.$$

Die Mafszahlen der Abschnitte, welche auf den Seiten durch drei Winkelhalbierende bestimmt werden, die sich in einem und demselben Punkte schneiden, genügen ähnlichen Gleichungen, nämlich:

$$a_3 b_1 c_2 = b_3 c_1 a_2 \text{ und } a_3' b_1 c_2' = b_3' c_1 a_2'.$$

Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt P der Ebene, der innerhalb oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt (Fig. 161), die Geraden PA, PB und PC, die sogenannten Ecktransversalen, so haben die Dreiecke APC und BPC die Seite PC gemein. Sind nun AQ und BR die

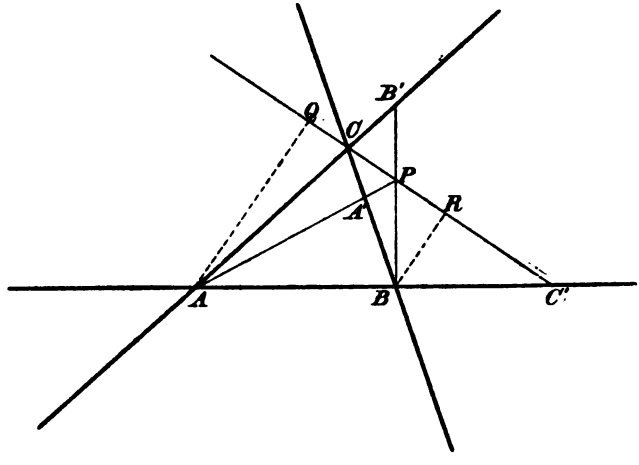


Fig. 161.

zu PC gehörigen Höhen beider Dreiecke, so ergiebt sich:

$$\frac{APC}{BPC} = \frac{AQ}{BR}.$$

Da aber $AQC' \sim BRC'$ ist, so ist weiter:

$$\frac{AQ}{BR} = \frac{AC'}{BC'}, \text{ mithin: } \frac{APC}{BPC} = \frac{AC'}{BC'}.$$

Durch cyklische Vertauschung ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{BPA}{CPA} = \frac{BA'}{CA'} \text{ und } \frac{CPB}{APB} = \frac{CB'}{AB'}.$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen erhält man eine neue, in der die linke Seite gleich 1 ist; folglich ist:

$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB'.$$

In Worten:

Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem und demselben Punkte, so sind für je drei Seitenabschnitte, die keinen Endpunkt gemein haben, die Produkte der Maſszahlen einander gleich.

Je nachdem der Punkt P innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks liegt, schneiden die Ecktransversalen die drei Seiten oder nur eine Seite und die Verlängerungen der

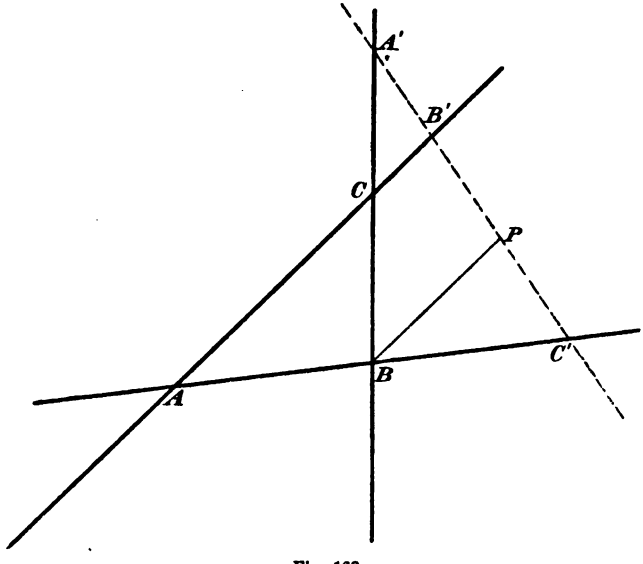


Fig. 162.

beiden andern. Die Anzahl der Schnittpunkte, die auf den Seiten selbst liegen, ist also immer eine ungerade Zahl.

Es stellt sich somit heraus, dafs die oben für die Höhen und die Winkelhalbierenden eines Dreiecks abgeleiteten Beziehungen nur besondere Fälle eines allgemeinern Satzes sind, der unter dem Namen des Ceva bekannt ist.

10. Werden die Seiten des Dreiecks ABC durch eine beliebige Transversale in A', B' und C' geschnitten (Fig. 162), und zieht man durch B die Parallele BP zu AC, so ist:

$$AB'C' \sim BPC' \quad \text{und} \quad B'CA' \sim PBA',$$

folglich: $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{BP}$ und $\frac{CB'}{CA'} = \frac{BP}{BA'}$.

Durch Multiplikation beider Gleichungen erhält man:

$$\frac{AC' \cdot CB'}{BC' \cdot CA'} = \frac{AB'}{BA'},$$

folglich:

$$AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB'.$$

In Worten:

Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten, so sind für je drei Seitenabschnitte, die keinen Endpunkt gemein haben, die Produkte der Maßzahlen einander gleich.

Die Transversale schneidet entweder zwei Seiten und die Verlängerung der dritten oder keine einzige Seite und die drei Verlängerungen. Die Anzahl der Schnittpunkte, die auf den Seiten selbst liegen, ist also immer eine gerade Zahl.

Der Satz ist unter dem Namen des Menelaos bekannt.

11. Durch indirekte Beweisführung ergeben sich mit Leichtigkeit die Umkehrungen der vorstehenden Sätze:

Werden auf den Seiten eines Dreiecks oder auf deren Verlängerungen drei Punkte so angenommen, daß für je drei Seitenabschnitte, die keinen Endpunkt gemein haben, die Produkte der Maßzahlen gleich sind, so bestimmen jene drei Punkte entweder drei Ecktransversalen, die durch einen und denselben Punkt gehen, oder eine einzige Gerade, je nachdem eine ungerade oder eine gerade Anzahl jener Punkte auf den Seiten selbst liegt.

Dieser Satz wird benutzt, um von drei Geraden zu beweisen, daß sie durch einen und denselben Punkt gehen, und von drei Punkten, daß sie auf einer und derselben Geraden liegen.

Übungen zu § 45.

1. Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn von drei Berührungskreisen die Radien gegeben sind.

2. Das Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des Umkreises

und der zur dritten Seite gehörigen Höhe. (Das Dreieck CAH_3 ist ähnlich dem Dreieck, dessen Hypotenuse der Durchmesser durch C, und dessen eine Kathete die Seite CB ist.)

3. Die Summe der Radien von zwei Ankreisen verhält sich zu deren Differenz wie die nicht zugehörige Seite zur Differenz der zugehörigen. (Man gehe von den Ausdrücken für den Flächeninhalt aus.)

4. Die Summe der Radien eines Ankreises und des Inkreises verhält sich zu deren Differenz wie die Summe der nicht zu jenem Ankreise gehörigen Seiten zu der zugehörigen Seite.

5. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn man kennt:

1) $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ 2) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ 3) i, ϱ, ϱ_1 4) i, ϱ_1, ϱ_2
5) ϱ_1, ϱ_2, c 6) $\varrho_1, \varrho_2, a-b$ 7) $r+s_3, c, a-b$
8) $\varrho_1-\varrho_2, r+s_3, c$ 9) ϱ_3, ϱ, c 10) $\varrho_3, \varrho, a+b$
11) $r-s_3, c, a+b$ 12) $\varrho_3+\varrho, r-s_3, c$ 13) $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}, c,$
$a+b$ 14) $a:b:c, \varrho_1+\varrho_2$ 15) $a:b:c, r+s_3$
16) $\frac{\varrho}{\varrho_3}, c, a-b$ 17) $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}, \varrho_3+\varrho$ 18) $\frac{b}{a}, \frac{a}{c}, r-s_3$
19) $\frac{a}{b}, r, h_3$ 20) $a \pm b, r, h_3$.

6. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Centralen, die den Mittelpunkt des Umkreises mit den Mittelpunkten der Berührungskreise verbinden, gleich dem zwölffachen Quadrat über dem Radius des Umkreises.

7. In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Differenz oder der Summe zwischen dem vierfachen Quadrat über der zugehörigen Mittellinie und dem achtfachen Rechteck aus der zugehörigen Höhe und der zugehörigen Mittelsenkrechten. (Zwischen der Gleichung für m_3^2 und der pythagoreischen Gleichung für c^2 eliminiere man a^2+b^2 unter Berücksichtigung der Ähnlichkeit der Dreiecke CHH_1 und CBH_3.)

8. Die Maßzahl für den doppelten Inhalt eines Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der Maßzahlen der drei Höhen und des Durchmessers des Umkreises.

9. In jedem Dreieck ist:

$$16i^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

(Man berücksichtige, daß die rechte Seite der Gleichung die Form einer Differenz von zwei Quadraten hat.)

10. Der Inhalt eines spitzwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus dem Radius seines Feuerbachschen Kreises und dem Umfange des Dreiecks der Höhenfußpunkte. (Wird H_2H_3 durch a' bezeichnet, so ergiebt sich aus dem Dreieck AH_2H_3 unter Anwendung des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes und unter Berücksichtigung der Gleichung $\frac{b_3}{b} = \frac{c_2}{c}$ die Beziehung:

$$a' = \frac{b_3 a}{b}.$$

Die ähnlichen Dreiecke AHH_3 und ABH_1 ergeben weiter:

$$b_3 = \frac{2h_1 s_1}{c},$$

folglich ist:

$$a' = \frac{4i}{abc} a s_1 = \frac{a s_1}{r}.$$

11. Wie ändert sich der vorstehende Satz für stumpfwinkelige Dreiecke?

12. Die Mittelpunkte der Ankreise eines Dreiecks bestimmen ein neues Dreieck, dessen Inhalt gleich dem Rechteck aus dem Umfange und dem Radius des Umkreises des ersten Dreiecks ist.

13. Wie lautet der entsprechende Satz für die Dreiecke, die durch den Mittelpunkt des Inkreises und die Mittelpunkte zweier Ankreise bestimmt werden? (An Stelle des halben Umfanges tritt dessen Überschuß über eine Seite.)

14. Für jedes Dreieck gelten die Beziehungen:

$$CJ = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}; \quad CK_3 = \sqrt{\frac{abs}{s-c}}; \quad JK_3 = c\sqrt{\frac{ab}{s(s-c)}};$$

$$CK_1 = \sqrt{\frac{ab(s-b)}{s-a}}; \quad CK_2 = \sqrt{\frac{ab(s-a)}{s-b}};$$

$$K_1K_2 = c\sqrt{\frac{ab}{(s-a)(s-b)}}.$$

15. Das Rechteck aus den Abständen einer Ecke eines Dreiecks von dem Mittelpunkte des Inkreises und dem Mittelpunkte des gegenüberliegenden Ankreises ist gleich dem Rechteck aus ihren Abständen von den Mittelpunkten der übrigen Berührungskreise.

16. In jedem Dreieck ist:

$$\overline{JK_1}^2 - \overline{UK_1}^2 + \overline{JK_2}^2 - \overline{UK_2}^2 + \overline{JK_3}^2 - \overline{UK_3}^2 = 5\overline{JU}^2.$$

17. Jedes Dreieck, welches durch die Berührungspunkte eines Berührungskreises bestimmt wird, ist dem Dreieck ähnlich, dessen Ecken die Mittelpunkte der drei übrigen Berührungskreise sind.

18. Die vier Dreiecke, welche durch die Berührungspunkte je eines Berührungskreises bestimmt werden, sind den Radien der Berührungskreise proportioniert. (Man berücksichtige Nr. 12 und 13.)

19. Die Summe der Dreiecke, welche durch die Berührungspunkte je eines Ankreises eines gegebenen Dreiecks bestimmt werden, ist um das Dreieck, dessen Ecken die Berührungspunkte des Inkreises sind, gröfser als der doppelte Inhalt des gegebenen Dreiecks.

20. Wenn die Schnittpunkte des Umkreises eines Dreiecks mit je drei Winkelhalbierenden, die durch einen und denselben Punkt gehen, als Ecken von vier neuen Dreiecken angenommen werden, so ist das zu den Halbierungslinien der Innenwinkel gehörige Dreieck gleich der Summe der drei übrigen. (Die Dreiecke sind beziehungsweise ähnlich den Dreiecken, die durch die Mittelpunkte von je drei Berührungskreisen bestimmt werden.)

21. Die Ecktransversalen eines Dreiecks, welche durch die Berührungspunkte desselben Berührungskreises gehen, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

22. In jedem Dreieck liegen in einer und derselben Geraden: 1) die Fufspunkte der Halbierungslinien der Aufsenwinkel, 2) der Fufspunkt der Halbierungslinie eines Aufsenwinkels und die Fufspunkte der Halbierungslinien der Innenwinkel an den beiden übrigen Ecken.

23. Die Mittelpunkte der Grundlinien, der Schnittpunkt der Diagonalen und der Schnittpunkt der Schenkel eines Trapezoids liegen in einer und derselben Geraden. (Die Diagonalen und die Verbindungslinie ihres Schnitt-

punktes mit dem Schnittpunkte der Schenkel sind Ecktransversalen eines Dreiecks.)

24. Wenn eine Gerade sich parallel zu einer Seite eines Dreiecks verschiebt, und ihre Schnittpunkte mit den beiden übrigen Seiten mit deren Gegenecken verbunden sind, so beschreibt der Schnittpunkt dieser Verbindungslinien die zu der ersten Seite gehörige Mittellinie.

25. Wenn zwei Ecktransversalen eines Dreiecks sich so um ihre Ecken drehen, daß ihr Schnittpunkt eine Ecktransversale der dritten Ecke durchläuft, so dreht sich die Verbindungslinie der Fußpunkte jener Transversalen um einen festen Punkt auf der Gegenseite der dritten Ecke oder verschiebt sich parallel zur Gegenseite der dritten Ecke.

26. Dreht sich eine Transversale um einen festen Punkt einer Dreieckseite, so bestimmen ihre Schnittpunkte mit den beiden übrigen Seiten zwei Ecktransversalen, deren Schnittpunkt eine Ecktransversale durchläuft, die durch die Gegenecke der erstgenannten Seite geht.

Fünfzehntes Kapitel.

Die Vielecke.

§ 46. Allgemeine Eigenschaften der Vielecke.

1. Unter einem Vieleck oder Polygon soll ein geradlinig begrenzter Teil der Ebene verstanden werden, welcher von keiner der durch die Grenzstrecken bestimmten Geraden geschnitten wird. Ist n die Anzahl dieser Grenzstrecken, so heifst das Vieleck ein n-eck. Das n-eck hat n Ecken, n Winkel und n Aufsenwinkel. Jeder Winkel ist kleiner als zwei Rechte. Die Verbindungslinien nicht benachbarter Ecken heifsen Diagonalen.

Ist n die Anzahl der Ecken, so ist jede Ecke der Ausgangspunkt von $n - 3$ Diagonalen. Zählt man nun an jeder Ecke jede Diagonale, so wird jede Diagonale an zwei Ecken, also doppelt, gezählt; folglich ist die Gesamtzahl der Diagonalen: $\frac{n(n-3)}{2}$.

2. Wird ein Punkt P im Innern eines n-ecks mit den Ecken verbunden, so zerfällt das n-eck in n Dreiecke, für welche die Winkelsumme $2R \cdot n$ beträgt. Da aber diejenigen Dreieckswinkel, die ihren Scheitel in P haben, keine Teile der Vieleckswinkel sind, und deren Summe $4R$ beträgt, so ist die Summe der Winkel des n-ecks: $R \cdot (2n - 4)$.

Die Summe der Aufsen- und der Innenwinkel beträgt $2R \cdot n$. Subtrahiert man hiervon die Summe der Innenwinkel, so ergiebt sich als Summe der Aufsenwinkel für jedes n-eck: $4R$.

3. Ist auf einer Geraden g eine Strecke AB gegeben (Fig. 163), so sind die Punkte C und C' symmetrisch bezüglich g, wenn $\sphericalangle ABC = ABC'$ und $BC = BC'$ ist. Wenn nun auch $\sphericalangle BCD = BC'D'$ und $CD = C'D'$ ist, so sind auch D und D' symmetrische Punkte bezüglich g.

An jedes bereits erhaltene Paar symmetrischer Punkte kann man dadurch ein neues anreihen, dafs man die zuletzt erhaltenen Punkte als Scheitel von zwei neuen symmetrischen

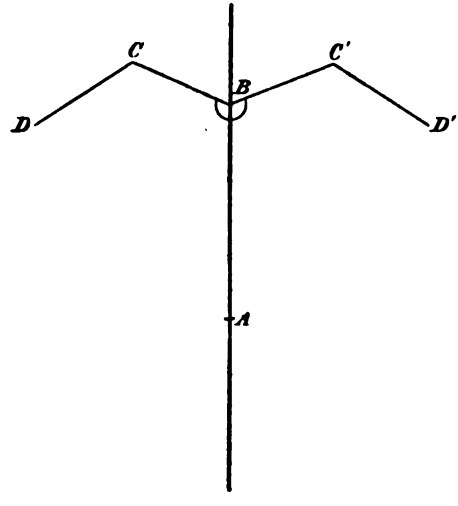


Fig. 163.

Winkeln und als Ausgangspunkte von zwei neuen symmetrischen Strecken betrachtet. Da nun zwei Paare symmetrischer Punkte zwei Paare symmetrischer Winkel und zwei Paare symmetrischer Strecken erfordern, so ist für jede vorgeschriebene Anzahl von symmetrischen Punktpaaren eine ebenso grofse Anzahl von symmetrischen Winkelpaaren und symmetrischen Streckenpaaren notwendig und hinreichend.

Werden nun $n-2$ symmetrische Punktpaare hergestellt, so bilden diese mit den auf g angenommenen Punkten A und B zwei symmetrische n-ecke. Da AB für beide Polygone eine zu sich selbst symmetrische Strecke ist, so wird die Symmetrie der Polygone durch die Symmetrie von

$n-1$ Seitenpaaren und den $n-2$ eingeschlossenen Winkelpaaren bedingt. Somit ergiebt sich der Satz:

Zwei n-ecke sind kongruent, wenn sie in $n-1$ Seiten und den $n-2$ eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen, und jene Seiten und Winkel in dem einen Polygon in derselben Ordnung aufeinander folgen wie in dem andern.

4. Geht man von einem Punkte A der Geraden g aus (Fig. 164), so kann man wieder mit $n-2$ symmetrischen Winkelpaaren und ebensoviel symmetrischen Streckenpaaren $n-2$ symmetrische Punktpaare bezüglich g herstellen. Werden die zuletzt erhaltenen Punkte P und P' als Ausgangspunkte von zwei neuen symmetrischen Strahlen angenommen, so schneiden sich diese auf der Achse und bestimme in ihren Scheiteln ein neues Paar von symmetrischen Winkeln. Die $n-2$ Punktpaare bilden mit den beiden Punkten der Achse zwei n-ecke, deren Symmetrie durch $n-1$ symmetrische Winkelpaare und die $n-2$ symmetrischen Streckenpaare bedingt wird, welche die Scheitel jener Winkel verbinden. Somit ergiebt sich der Satz:

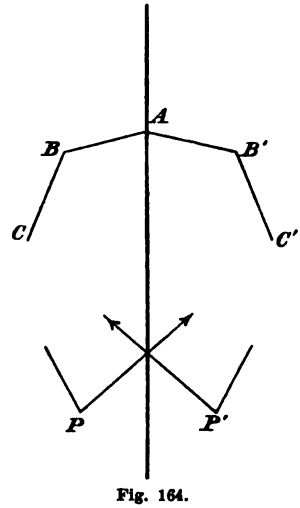


Fig. 164.

Zwei n-ecke sind kongruent, wenn sie in $n-1$ Winkeln und den $n-2$ Seiten übereinstimmen, die ihre Scheitel verbinden, und jene Winkel und Seiten in dem einen Polygon in derselben Ordnung aufeinander folgen wie in dem andern.

Werden zwei kongruente Polygone zur Deckung gebracht, so werden je zwei sich deckende Punkte oder Strecken homolog genannt. Verbindungslinien von homologen Punkten sind selbst homolog, ebenso Schnittpunkte von homologen Strecken.

5. Es seien $ABCDE\ldots$ und $A'B'C'D'E'\ldots$ zwei Polygone von gleicher Seitenzahl (Fig. 165), deren Seiten und

Winkel beziehungsweise durch $a, b, c, d, \ldots, a', b', c', d', \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ bezeichnet werden sollen.

Ist $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ und $\beta = \beta'$, so folgt:

$$ABC \sim A'B'C',$$

mithin:

$$\sphericalangle CAB = C'A'B', \sphericalangle ACB = A'C'B' \text{ und } \frac{AC}{A'C'} = \frac{a}{a'}.$$

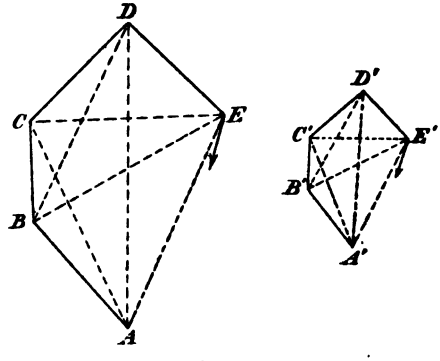


Fig. 165.

Wenn nun weiter $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$ und $\gamma = \gamma'$ ist, so ergiebt sich:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{c}{c'} \text{ und } \sphericalangle ACD = A'C'D',$$

also:

$$ACD \sim A'C'D', \frac{AD}{A'D'} = \frac{c}{c'}, \sphericalangle ADC = A'D'C',$$

$$\sphericalangle DAC = D'A'C' \text{ und } \sphericalangle DAB = D'A'B',$$

folglich auch:

$$DAB \sim D'A'B' \text{ und } DCB \sim D'C'B'.$$

Ist ferner $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'}$ und $\delta = \delta'$, so folgt wieder:

$$ADE \sim A'D'E', EDC \sim E'D'C', ECB \sim E'C'B'$$

und

$$EAB \sim E'A'B'.$$

Man sieht daher ein: wenn die Seiten des einen Polygons in ihrer natürlichen Reihenfolge den Seiten des andern proportioniert und die von proportionierten Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind, so gehört zu jedem Dreieck, das in dem einen Vieleck aus Seiten oder Diagonalen oder Seiten und Diagonalen hergestellt wird, ein ähnliches Dreieck in dem andern, und zu jeder Reihe von Dreiecken des einen Polygons eine Reihe von ähnlichen Dreiecken, die in dem andern Vieleck in derselben Ordnung aufeinander folgen. Zwei solche Polygone heifsen ähnlich. Die Bezeichnung homolog wird sinngemäfs von ähnlichen Dreiecken auf ähnliche Vielecke übertragen.

Zieht man in jedem von zwei ähnlichen Polygonen die Diagonalen von homologen Ecken aus, und bezeichnet man die erhaltenen Dreiecke beziehungsweise durch $i_1, i_2, i_3, \ldots$, $i_1', i_2', i_3', \ldots$, so ist:

$$\frac{i_1}{i_1'} = \frac{i_2}{i_2'} = \frac{i_3}{i_3'} = \ldots = \frac{a^2}{a'^2},$$

also auch:

$$\frac{i_1 + i_2 + i_3 + \ldots}{i_1' + i_2' + i_3' + \ldots} = \frac{i}{i'} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

In Worten:

Ähnliche Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Übungen zu § 46.

1. Welche Vielecke haben beziehungsweise 5, 9, 27, 44, 170, 560, 4850 Diagonalen?

2. In welchen Vielecken beträgt die Winkelsumme beziehungsweise $8R$, $16R$, $24R$, $60R$?

3. In wieviel Dreiecke zerfällt ein Polygon durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen?

4. Zwei Polygone sind kongruent, wenn sie in drei aufeinander folgenden Seiten und in den Diagonalen, die von den Endpunkten der mittlern Seiten ausgehen, übereinstimmen, und jene Seiten und Diagonalen in dem einen Polygon in derselben Ordnung aufeinander folgen wie in dem andern.

5. Zwei Polygone sind kongruent, wenn sie in zwei Nachbarseiten, in den Diagonalen, die von dem gemeinschaft-

lichen Endpunkte dieser Seiten ausgehen, und in den Winkeln übereinstimmen, welche diese Diagonalen unter sich und mit jenen Seiten bilden, und jene Seiten, Diagonalen und Winkel in dem einen Polygon in derselben Ordnung aufeinander folgen wie in dem andern.

6. Wenn n Gerade sich in einem und demselben Punkte schneiden, und man von diesem Punkte aus auf jeder Geraden in derselben Richtung oder auf jeder Geraden in entgegengesetzten Richtungen zwei Strecken abträgt, deren Verhältnis für alle Geraden dasselbe ist, so bestimmen die Endpunkte der abgetragenen Strecken ein Paar ähnlicher Polygone.

7. Wenn in ähnlichen Polygonen je zwei homologe Seiten parallel sind, so gehen die Verbindungslinien von je zwei homologen Ecken durch einen und denselben Punkt.

8. Zu einem gegebenen Viereck ein ähnliches von halbem Inhalte zu zeichnen.

9. Ein gegebenes Polygon in die Summe von zwei ihm ähnlichen Polygonen zu zerlegen, wenn für zwei homologe Seiten der letztern die Summe oder die Differenz vorgeschrieben ist, oder wenn das Rechteck von zwei homologen Seiten der gesuchten Polygone einem gegebenen Rechteck gleich ist, oder wenn für zwei homologe Seiten der gesuchten Polygone das Verhältnis gegeben ist.

§ 47. Das Viereck.

1. Sind P und Q die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ (Fig. 166), so ergeben sich für die Mittellinien DP, BP und PQ der Dreiecke ACD, ACB und DBP die Gleichungen:

$$\overline{DP}^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} - \frac{e^2}{4}; \quad \overline{BP}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{e^2}{4}$$

und

$$\overline{PQ}^2 = \frac{\overline{DP}^2}{2} + \frac{\overline{BP}^2}{2} - \frac{f^2}{4}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun:

$$\overline{PQ}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2}{4}$$

oder $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\overline{PQ}^2.$$

In Worten:

Die Summe der Seitenquadrate eines Vierecks übertrifft die Summe der Diagonalenquadrate um das vierfache Quadrat über dem Abstande der Diagonalenmittelpunkte.

Die Forderung, daſs ein Viereck ein Parallelogramm sei, ist identisch mit der Forderung, daſs die Mittelpunkte der Diagonalen zusammenfallen; also auch identisch mit der

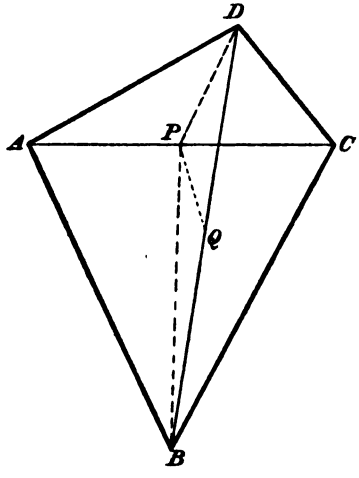


Fig. 166.

Forderung, daſs die Summe der Seitenquadrate gleich der Summe der Diagonalenquadrate sei.

2. Wenn in einem Viereck $ABCD$ zwei Gegenwinkel Supplementwinkel sind, so sind es auch die beiden andern Gegenwinkel, und jeder Winkel ist gleich dem Aufsenwinkel an der Gegenecke. Wird durch die Ecken A, B und C eines solchen Vierecks ein Kreis gelegt (Fig. 167), so ist in der Halbebene D der Bogen AC der Ort für die Scheitel aller Winkel von der Gröfse $2R - \beta$, deren Schenkel beziehungsweise durch A und C gehen. Auf diesem Bogen liegt daher der Punkt D. In Worten:

Jedem Viereck, in dem ein Winkel gleich dem Aufsenwinkel an der Gegenecke ist, kann ein Kreis umgeschrieben werden.

Umgekehrt ist in jedem Sehnenviereck eines Kreises jeder Winkel gleich dem Aufsenwinkel an der Gegenecke.

3. Da der Inhalt eines Dreiecks durch die Seiten ausgedrückt werden kann und man das Dreieck als ein Kreisviereck betrachten kann, in dem eine Seite unendlich klein ist, so liegt die Vermutung nahe, dafs der Inhalt eines

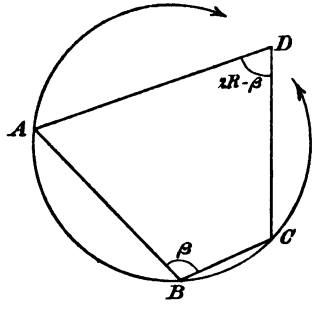


Fig. 167.

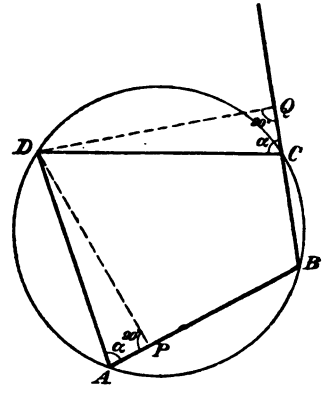


Fig. 168.

Kreisvierecks sich durch die Seiten in ähnlicher Weise ausdrücken läfst wie der Inhalt des Dreiecks.

Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz ergiebt für die Diagonale BD des Sehnenvierecks $ABCD$ (Fig. 168):

$$f^2 = a^2 + d^2 + 2a \cdot AP = b^2 + c^2 - 2b \cdot CQ,$$

also folgt:

$$2(a \cdot AP + b \cdot CQ) = b^2 + c^2 - a^2 - d^2.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CQD und APD ergiebt sich weiter:

$$\frac{AP}{d} = \frac{CQ}{c} = \frac{a \cdot AP}{ad} = \frac{b \cdot CQ}{bc} = \frac{2(a \cdot AP + b \cdot CQ)}{2ad + 2bc},$$

folglich:

$$\frac{AP}{d} = \frac{CQ}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2ad + 2bc}.$$

Wird jedes der drei gleichen Verhältnisse zu der Zahl 1 addiert und von der Zahl 1 subtrahiert, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{d + AP}{d} = \frac{c + CQ}{c} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2ad + 2bc}$$

$$= \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{2ad + 2bc}$$

und

$$\frac{d - AP}{d} = \frac{c - CQ}{c} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2ad + 2bc}$$

$$= \frac{(a + d + b - c)(a + d - b + c)}{2ad + 2bc}.$$

Setzt man

$$a + b + c + d = 2s,$$

also

$$a + b + c - d = 2(s - d)$$

u.s.w., so ergiebt sich durch Multiplikation obiger Gleichungen:

$$\frac{d^2 - \overline{AP}^2}{d^2} = \frac{c^2 - \overline{CQ}^2}{c^2} = \frac{4(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}{(ad + bc)^2}$$

oder

$$\frac{DP}{d} = \frac{DQ}{c} = \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}}{ad + bc}.$$

Es ist aber:

$$\frac{DP}{d} = \frac{DQ}{c} = \frac{a \cdot DP}{ad} = \frac{b \cdot DQ}{bc} = \frac{2J}{ad + bc},$$

folglich:

$$J = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Setzt man $d = 0$, so geht das Viereck in ein Dreieck über, und der gefundene Ausdruck in die Inhaltsformel für das Dreieck.

4. Da im Sehnenviereck $ABCD$ jeder Winkel gleich dem Aufsenwinkel an der Gegenecke ist, so erhält man ähn-

liche Dreiecke, wenn in D an DA der Winkel BDC angetragen wird (Fig. 169), nämlich:

$$FDA \sim BDC.$$

Aus ihnen ergiebt sich:

$$\frac{AF}{b} = \frac{d}{c}, \text{ also } AF = \frac{bd}{c}.$$

Sind die Seiten des Sehnenvierecks vorgeschrieben, so ist AF konstruierbar; mithin auch die Punkte A, B und F

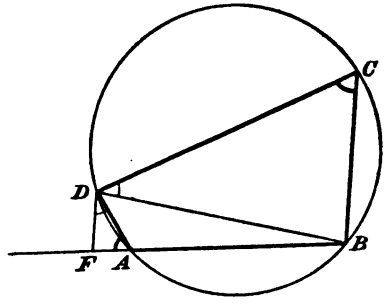


Fig. 169.

und je ein Ort für die Punkte C und D. Es ist aber auch:

$$\frac{DF}{DB} = \frac{d}{c},$$

folglich ist für den Punkt D das Verhältnis der Abstände von zwei festen Punkten vorgeschrieben und ein zweiter Ort für D bekannt, nämlich ein Apollonischer Kreis des Dreiecks BDF. Schliefslich giebt die Bedingung $CD = c$ einen zweiten Ort für C. Das Sehnenviereck ist somit aus seinen Seiten konstruierbar.

5. Wird in dem Sehnenviereck $ABCD$ der Winkel DCE gleich BCA angenommen (Fig. 170), so sind die Dreiecke DCE und ACB wegen der Gleichheit der Winkel CDB und CAB ähnlich, somit ist:

$$DE \cdot e = ac.$$

Andererseits ist aber auch:

$$EBC \sim DAC, \text{ also } EB \cdot e = bd.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$(DE + EB) \cdot e = ac + bd \text{ oder } ef = ac + bd.$$

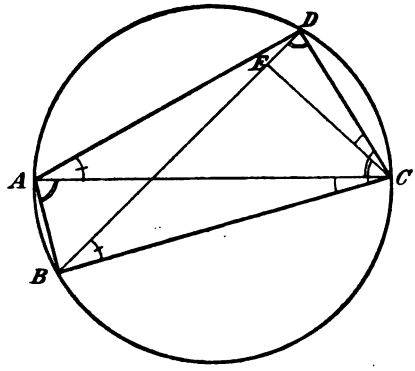


Fig. 170.

In Worten: Das Rechteck aus den Diagonalen eines Sehnenvierecks ist gleich der Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten. (Lehrsatz des Ptolemäus.)

6. Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck (Fig. 171).

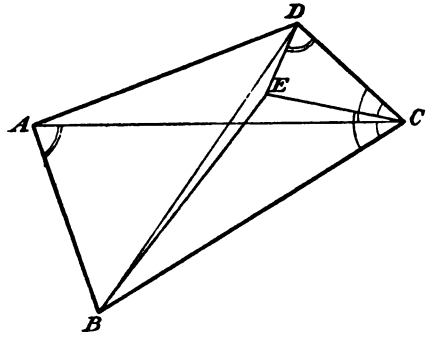


Fig. 171.

Zieht man die Strahlen CE und DE so, dafs $\sphericalangle ECD = BCA$ und $\sphericalangle EDC = BAC$ wird, so folgt:

$$DCE \sim ACB,$$

also

$$\frac{DE}{a} = \frac{CE}{b} = \frac{c}{e} \text{ und } DE = \frac{ac}{e}.$$

Aus der Gleichheit der Winkel DCE und ACB folgt, daſs auch $\sphericalangle DCA = BCE$ ist. Berücksichtigt man nun die obige Proportion: $\frac{CE}{b} = \frac{c}{e}$, so ergiebt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke DCA und ECB, woraus dann wieder folgt:

$$\frac{BE}{d} = \frac{b}{e} \quad \text{und} \quad BE = \frac{bd}{e}.$$

Zwischen den Seiten des Dreiecks BDE besteht nun die Beziehung:

$$BE + DE > BD,$$

also erhält man unter Benutzung der für BE und DE gefundenen Ausdrücke:

$$\frac{ac}{e} + \frac{bd}{e} > f, \quad \text{oder:} \quad ac + bd > ef.$$

So ergiebt sich der Satz:

Im Viereck ist das Rechteck aus den Diagonalen nie grösser als die Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten.

Damit der Ptolemäische Lehrsatz für ein Viereck zutreffe, genügt es, daſs $DE + BE = BD$ sei, daſs also E auf BD liege. In diesem Falle ist aber $\sphericalangle BDC = BAC$, also das betrachtete Viereck ein Sehnenviereck.

7. In einem Kreise wird die Länge eines Bogens durch die Länge der zugehörigen Sehne eindeutig bestimmt. Wenn daher die vier Sehnen a, b, c, d in der gegebenen Reihenfolge ein Sehnenviereck bestimmen, so müssen sie bei jeder Reihenfolge die Seiten eines solchen bilden. Da nun zu der Seite a jede der drei andern als Gegenseite gedacht werden kann, und zwei entgegengesetzte Reihenfolgen dasselbe Viereck ergeben, so kann es auſser dem ursprünglichen Sehnenviereck nur noch zwei andere geben: entweder ist b oder d die Gegenseite von A. Man erhält das eine, wenn man durch C die Parallele zu BD (Fig. 172), das andere, wenn man durch D die Parallele zu AC zieht und den jedesmaligen Schnittpunkt der Parallele und des Kreises an die Stelle der genannten Ecke treten läſst.

Jedes der beiden Vierecke $ABC'D$ und $ABCD'$ hat mit dem gegebenen eine Diagonale gemein; auſserdem stimmen

beide Vierecke wegen der Kongruenz der Dreiecke ADC' und BCD' in den Diagonalen AC' und BD' überein ($AD = CD'$; $DC' = BC$; $\sphericalangle C'DA = BCD'$). Folglich gehören zu je drei Sehnenvierecken desselben Kreises, die sich nur durch die

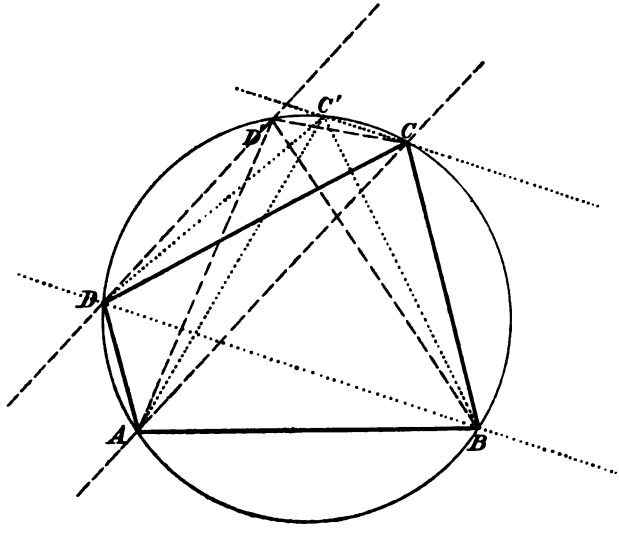


Fig. 172.

Reihenfolge der Seiten unterscheiden, drei Diagonalen e, f und g.

Wendet man den Ptolemäischen Lehrsatz auf jedes der drei Vierecke an, so erhält man:

$$ef = ac + bd, \quad fg = ab + cd, \quad eg = ad + bc,$$

also auch:

$$\text{und} \qquad \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \quad \frac{g}{e} = \frac{ab + cd}{ac + bd},$$

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}; \quad f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc};$$

$$g^2 = \frac{(ab + cd)(ad + bc)}{ac + bd}.$$

Die Herstellung des zweiten und des dritten Vierecks aus dem ersten lehrt aufserdem, dafs alle drei gleich sind.

8. Die Maſszahl für den Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Quotient aus dem Produkte der Maſszahlen seiner Seiten und der vierfachen Maſszahl des Radius seines Umkreises.

Für die Dreiecke, die durch die Diagonalen des Kreis-

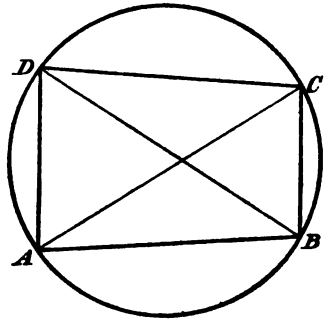


Fig. 173.

vierecks $ABCD$ bestimmt werden, ergiebt sich daher (Fig. 173):

$$ABC = \frac{abe}{4r},\quad ADC = \frac{cde}{4r},\quad BCD = \frac{bcf}{4r},\quad BAD = \frac{adf}{4r}.$$

Da sowohl die Summe der beiden ersten Dreiecke als auch die Summe der beiden letzten gleich dem Inhalte i des Sehnenvierecks ist, so folgt weiter:

$$i = \frac{e}{4r}(ab + cd) \quad \text{und} \quad i = \frac{f}{4r}(bc + ad),$$

also:

$$i^2 = \frac{ef(ab + cd)(bc + ad)}{16r^2} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(bc + ad)}{16r^2}$$

$$= \frac{e^2f^2g^2}{16r^2},$$

und schliefslich:

$$i = \frac{efg}{4r}.$$

9. $ABCD$ sei ein aus vier Tangenten eines Kreises gebildetes Viereck.

Sind A', B', C' und D' die Berührungspunkte der Tangenten (Fig. 174), so ist:

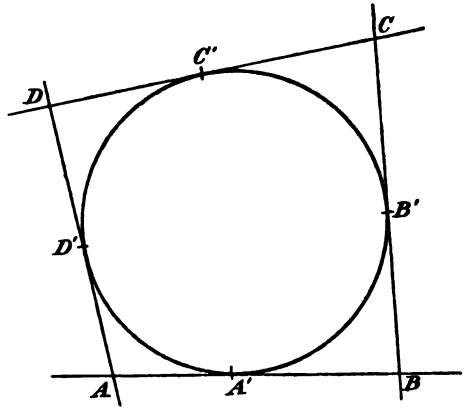


Fig. 174.

$$AB = AD' + BB' \quad \text{und} \quad DC = DD' + CB',$$

folglich auch:

$$AB + DC = AD' + DD' + BB' + CB' = AD + BC.$$

Wenn umgekehrt in einem Viereck $ABCD$ die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern ist, und ein Kreis gezeichnet wird, der die Seiten AD, AB und BC berührt (Fig. 175), so muſs von drei Fällen der eine eintreten: entweder berührt CD diesen Kreis, oder CD schneidet den Kreis, oder CD hat keinen Punkt mit dem Kreise gemein.

Träte der zweite Fall ein, so könnte man von dem Punkte D aus, der als Punkt einer Tangente auſserhalb des Kreises liegt, an diesen die Tangente DX ziehen. Dann würde folgen:

$$AB + DX = AD + BX.$$

Da aber nach Voraussetzung

$$AB + DC = AD + BC$$

ist, so würde sich aus beiden Gleichungen die folgende ergeben:

$$DX - DC = BX - BC \quad \text{oder} \quad DX - DC = CX.$$

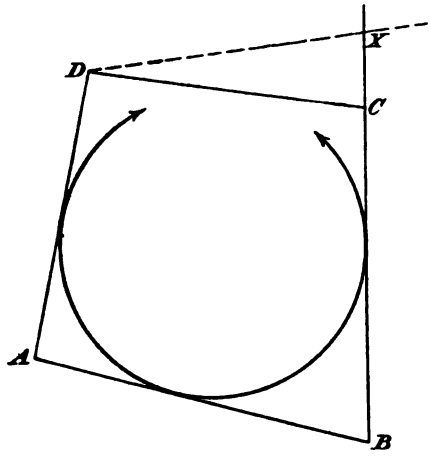


Fig. 175.

In dem Dreieck DCX kann aber die Differenz zweier Seiten nicht gleich der dritten Seite sein.

In ähnlicher Weise wird gezeigt, daſs auch die dritte Annahme nicht zutreffen kann. Somit ergeben sich die Sätze:

Im Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern.

Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern ist, so kann dem Viereck ein Kreis eingeschrieben werden.

Übungen zu § 47.

1. Für welche Vierecke, die in den Diagonalen übereinstimmen, ist die Summe der Seitenquadrate am kleinsten?

2. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn man die Summe der Seitenquadrate, das Rechteck aus den Diagonalen und einen Winkel kennt.

3. Ein Parallelogramm aus der Summe der Diagonalenquadrate, dem Winkel der Diagonalen und dem Verhältnis zweier Nachbarseiten zu konstruieren.

4. Wird ein beliebiger Punkt im Innern eines Parallelogramms mit den Ecken verbunden, so giebt es stets ein Viereck, dessen Diagonalen den Seiten des Parallelogramms, und dessen Seiten den Abständen jenes Punktes von den Ecken des Parallelogramms beziehungsweise gleich sind.

5. Die Mittelpunkte der Diagonalen eines Vierecks bestimmen ein Parallelogramm mit je zwei Mittelpunkten von Gegenseiten des Vierecks.

6. Ein Viereck aus den Diagonalen, ihrem Winkel und zwei Seiten zu zeichnen.

7. Ein Viereck aus den Seiten und dem Abstande der Diagonalenmittelpunkte zu konstruieren.

8. Ein Viereck aus der Summe (Differenz) der Quadrate von je zwei Gegenseiten, den von je zwei Gegenseiten bestimmten Winkeln und dem Abstande der Diagonalenmittelpunkte zu konstruieren.

9. Ein Viereck aus zwei Gegenseiten, den beiden Diagonalen und dem Abstande der Diagonalenmittelpunkte zu zeichnen.

10. Ein Viereck aus zwei Nachbarseiten, den Diagonalen und dem Flächeninhalte zu zeichnen.

11. Die Dreiecke, in welche ein Sehnenviereck durch eine Diagonale geteilt wird, verhalten sich wie die Rechtecke aus den Seiten, welche mit der Diagonale jene Dreiecke begrenzen.

12. Wenn für ein Sehnenviereck das Verhältnis der Seiten gegeben ist, wie verhalten sich dann je zwei Dreiecke, in die das Sehnenviereck durch eine Diagonale zerlegt wird?

13. Ein Sehnenviereck zu zeichnen aus einer Seite, einer Diagonale, dem Winkel der Diagonalen und dem Verhältnis der Dreiecke, in welche das Viereck durch die nicht gegebene Diagonale geteilt wird.

14. Ein Sehnenviereck aus dem Verhältnis zweier Nachbarseiten, der ihre Endpunkte verbindenden Diagonale, dem Verhältnis, in welchem das Sehnenviereck durch diese Diagonale geteilt wird, und dem Flächeninhalte zu konstruieren.

15. Ein Sehnenviereck aus dem Radius seines Umkreises, seinen Diagonalen und dem Verhältnis des Rechtecks aus zwei Nachbarseiten zu dem Rechteck der beiden andern Seiten.

16. Einem gegebenen Kreise sollen drei in den Seiten übereinstimmende Sehnenvierecke eingeschrieben werden, wenn ihre Diagonalen gegeben sind.

17. Drei in den Seiten und in dem Umkreise übereinstimmende Sehnenvierecke zu zeichnen, wenn ihr Inhalt und ihre Diagonalen gegeben sind.

18. Mit Hilfe des Ptolemäischen Lehrsatzes soll für das Dreieck die Beziehung $abc = 4ri$ abgeleitet werden. (Wenn das Sehnenviereck in ein Dreieck übergeht, so wird $efg = abc$.)

19. Sind die Seiten eines Sehnenvierecks den Seiten eines zweiten in ihrer gegebenen Reihenfolge proportioniert, so sind auch die Diagonalen des einen denen des andern proportioniert.

20. Den Inhalt eines Tangentenvierecks durch die Summe zweier Gegenseiten und den Radius seines Inkreises auszudrücken.

21. Ein Tangentenviereck aus einem Winkel, dem Verhältnis seiner Anseiten, der Summe derselben und dem Verhältnis der beiden andern Seiten zu zeichnen.

22. Ein Tangentenviereck zu zeichnen aus einem Winkel, dem Flächeninhalte, dem Radius seines Inkreises und dem Verhältnis oder der Differenz eines Paares Gegenseiten.

§ 48. Die regelmäfsigen Vielecke.

1. Ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Vieleck heifst regelmäfsig.

Vier aufeinander folgende Ecken A, B, C und D eines regelmäfsigen Polygons bestimmen eine Figur, die bezüglich der Mittelsenkrechten g der mittlern Seite BC symmetrisch ist (Fig. 176). Die Gerade g ist aber auch eine Achse für den Kreis, der durch A, B und C geht; folglich sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit den Geraden CD und AB beziehungsweise symmetrisch. Da nun D der zu A symmetrische Punkt ist, so geht der Kreis durch D. Der durch drei aufeinander folgende Ecken eines regelmäfsigen Vielecks be-

stimmte Kreis geht also durch die benachbarte vierte Ecke, mithin durch alle folgenden.

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises eines regelmäfsigen Vielecks, so können die Seiten desselben als gleiche Sehnen des Kreises M betrachtet werden. Sie haben also von M gleiche Abstände und berühren daher einen Kreis um M. Jedes regelmäfsige Polygon hat demnach einen Inkreis, der mit dem Umkreise konzentrisch ist. Wie beim

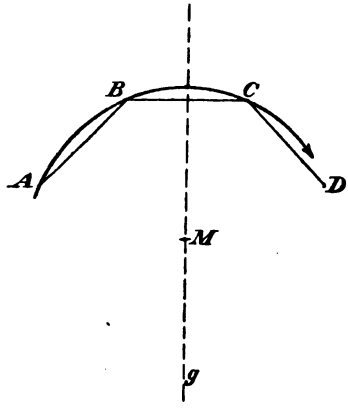


Fig. 176.

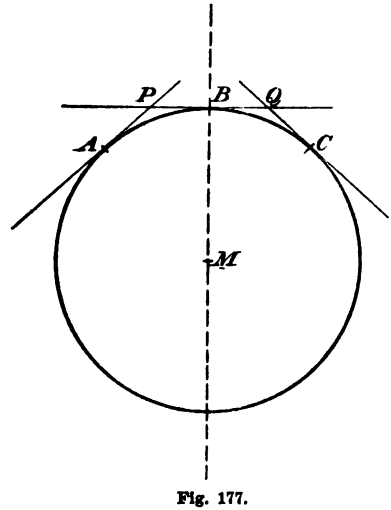


Fig. 177.

Dreieck sollen die Radien dieser Kreise mit r und ϱ bezeichnet werden.

2. Ist eine Kreislinie in n gleiche Teile geteilt, so ist das durch die Teilpunkte bestimmte Polygon gleichseitig. Durch Drehung der Ebene um den Mittelpunkt des gegebenen Kreises kann man irgend drei aufeinander folgende Ecken des Polygons mit irgend drei andern aufeinander folgenden zur Deckung bringen. Das betrachtete Polygon ist also auch gleichwinkelig.

Werden in den Teilpunkten der Kreislinie die Tangenten gezogen (Fig. 177), so ist die durch drei aufeinander folgende Tangenten gebildete Figur symmetrisch bezüglich des Durchmessers, der durch den Berührungspunkt der mittlern geht.

Folglich sind je zwei Nachbarwinkel des Vielecks gleich, und dieses ist gleichwinkelig. Ferner ergiebt sich aus der Symmetrie, daſs jede Seite durch ihren Berührungspunkt halbiert wird. Somit ist jede Hälfte einer Seite der Hälfte der Nachbarseite gleich, und das Vieleck ist auch gleichseitig, also regelmäſsig.

Die Aufgabe, ein regelmäſsiges n-eck zu zeichnen, ist also identisch mit der folgenden: einen gegebenen Kreis in n gleiche Teile zu teilen.

3. Wenn man die Ecken eines regelmäſsigen Polygons mit dem Mittelpunkte seines Umkreises verbindet, so zerfällt das Vieleck in ebensoviel kongruente gleichschenkelige Dreiecke, als es Seiten hat. Da das Polygon durch jedes dieser Dreiecke bestimmt wird, so heiſst jedes solche Dreieck ein Bestimmungsdreieck des Polygons (Fig. 178).

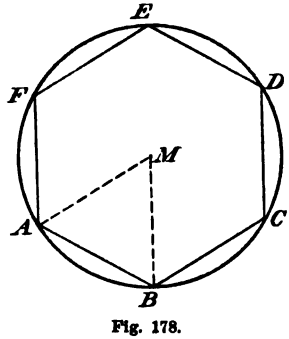


Fig. 178.

Ist von einem regelmäſsigen Polygon die Seitenzahl gegeben, so sind auch die Winkel seines Bestimmungsdreiecks vorgeschrieben; der Winkel an der Spitze ist nämlich $\frac{4R}{n}$, und aus diesem kann jeder Basiswinkel berechnet werden. Das Bestimmungsdreieck ist somit bestimmt, wenn man auſser der Seitenzahl des Polygons entweder den Radius des Umkreises oder den Radius des Inkreises oder die Seite des Polygons kennt. Daraus ergeben sich die Aufgaben: einem gegebenen Kreise ein regelmäſsiges n-eck einzuschreiben, einem gegebenen Kreise ein regelmäſsiges n-eck umzuschreiben, ein regelmäſsiges n-eck aus einer Seite zu konstruieren.

Da die Ecken eines eingeschriebenen regelmäſsigen n-ecks die Berührungspunkte der Seiten eines umgeschriebenen regelmäſsigen Polygons von gleicher Seitenzahl sind, so ist die zweite Aufgabe auf die erste zurückgeführt.

4. Die Aufgaben sind ohne weiteres lösbar, wenn der Winkel $\frac{360^0}{n}$ mit Hilfe des Zirkels und des Lineales gezeichnet werden kann, was zunächst nur für die Fälle $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$ möglich ist.

Ist nun einem Kreise ein regelmäfsiges Vieleck von der Seitenzahl n eingeschrieben, so wird die Kreislinie durch die Ecken des Polygons und durch die Mittelsenkrechten seiner Seiten in $2n$ gleiche Teile geteilt; folglich kann aus je einem eingeschriebenen Polygon sowohl das ein- als auch das umgeschriebene Polygon von doppelter Seitenzahl erhalten werden. Da man aber von dem $2n$-eck zu dem $4n$-eck in derselben Weise übergehen kann, so ergiebt sich: ist das regelmäfsige n-eck konstruierbar, so kann auch jedes regelmäfsige Polygon gezeichnet werden, dessen Seitenzahl das n-fache einer Potenz von 2 ist.

Ist n eine gerade Zahl, so kann auch aus dem eingeschriebenen n-eck sowohl das ein- als auch das umgeschriebene regelmäfsige Polygon von halber Seitenzahl hergestellt werden.

5. Ist ABM das Bestimmungsdreieck des regelmäfsigen Zehnecks im Kreise M, so ist $\sphericalangle AMB = 36^0$, jeder Basiswinkel des Dreiecks gleich 72^0, also doppelt so grofs (Fig. 179).

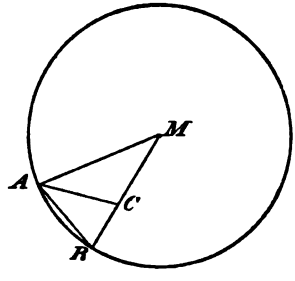


Fig. 179.

Wenn nun AC den Winkel MAB halbiert, so sind auch die Dreiecke MAC und BCA gleichschenkelig, mithin:

$$AB = AC = MC.$$

Aufserdem ist aber:

$$BCA \sim ABM, \text{ also: } \overline{AB}^2 = r \cdot BC,$$

oder, wenn man die Seite des Zehnecks durch s bezeichnet:

$$s^2 = r(r - s).$$

Die Seite des eingeschriebenen regelmäfsigen Zehnecks ist also gleich dem gröfsern Abschnitte des nach dem goldenen Schnitte geteilten Radius.

Aus dem Zehneck kann auch das Fünfeck erhalten werden.

Die Konstruktion der Zehneckseite ergiebt auch die Konstruktion eines Winkels von 36° mit Hilfe des Zirkels und des Lineales.

6. Ist AB die Seite des Sechsecks (Fig. 180), AC die des Zehnecks im Kreise M, so ist:

$$\sphericalangle BMC = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ.$$

Mithin ist BC die Seite des eingeschriebenen regelmäfsigen Fünfzehnecks.

7. Im Kreise vom Radius r soll die Seite des eingeschriebenen regelmäfsigen n-ecks durch s_n, der Radius

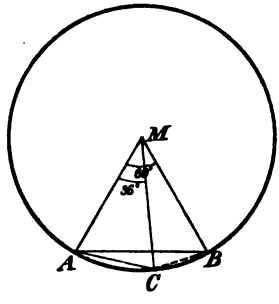


Fig. 180.

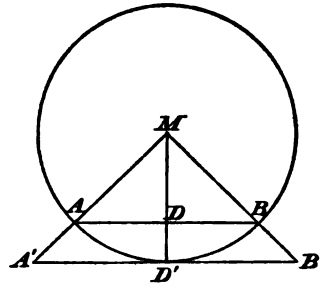


Fig. 181.

seines Inkreises durch ϱ_n, sein Umfang durch u_n, sein Inhalt durch i_n bezeichnet werden. Es ist dann:

$$u_n = n s_n, \quad \varrho_n = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \quad i_n = n \cdot \frac{1}{2} s_n \varrho_n = \frac{1}{2} u_n \varrho_n.$$

Da die Bestimmungsdreiecke von irgend zwei regelmäfsigen Polygonen gleicher Seitenzahl in den Winkeln übereinstimmen, so sind auch die Bestimmungsdreiecke des ein- und des umgeschriebenen n-ecks einander ähnlich (Fig. 181). Bezeichnet man Seite, Umfang und Inhalt des umgeschriebenen n-ecks beziehungsweise durch S_n, U_n und J_n, und berücksichtigt man, dafs für jedes umgeschriebene Polygon der Radius des Inkreises gleich r ist, so erhält man die Beziehung:

$$\frac{U_n}{u_n} = \frac{n S_n}{n s_n} = \frac{r}{\varrho_n}, \text{ also: } U_n = \frac{r}{\varrho_n} u_n \text{ und } J_n = \frac{r U_n}{2}.$$

Für die einfachern regelmäfsigen Vielecke ergeben sich folgende Werte:

$$s_3 = r\sqrt{3} \qquad \varrho_3 = \frac{r}{2} \qquad u_3 = 3r\sqrt{3}$$

$$s_4 = r\sqrt{2} \qquad \varrho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2} \qquad u_4 = 4r\sqrt{2}$$

$$s_6 = r \qquad \varrho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3} \qquad u_6 = 6r$$

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad \varrho_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad u_{10} = 5r(\sqrt{5}-1)$$

$$i_3 = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3} \qquad U_3 = 6r\sqrt{3} \qquad J_3 = 3r^2\sqrt{3}$$

$$i_4 = 2r^2 \qquad U_4 = 8r \qquad J_4 = 4r^2$$

$$i_6 = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3} \qquad U_6 = 4r\sqrt{3} \qquad J_6 = 2r^2\sqrt{3}$$

$$i_{10} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad U_{10} = 4r\sqrt{25-10\sqrt{5}} \qquad J_{10} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

Zu den Gröfsen des Fünfecks führt folgende Überlegung: Wenn ABM das Bestimmungsdreieck des Zehnecks ist (Fig. 182), so ist:

$$\sphericalangle MAB = 72^0.$$

Beschreibt man um A den Kreis mit dem Radius r, der AB in C schneidet, so ist MC die Seite des regelmäfsigen Fünfecks im Kreise vom Radius r. Wird nun durch C die Tangente CD an den Kreis gelegt, so ist:

$$\overline{CD}^2 = CB \cdot CA.$$

Es ist aber auch:

$$\overline{AB}^2 = CB \cdot CA,$$

folglich:

$$CD = AB.$$

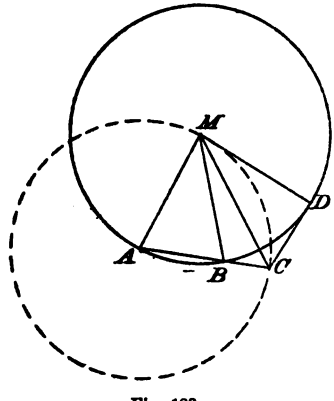


Fig. 182.

Somit ist die Seite des Fünfecks die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks CDM, dessen Katheten der Seite des regelmäfsigen Sechsecks und der Seite des regelmäfsigen Zehnecks beziehungsweise gleich sind. Also erhält man:

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \varrho_5 = \frac{r}{4}(1+\sqrt{5}) \qquad u_5 = \frac{5r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$i_5 = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad U_5 = 10r\sqrt{5-2\sqrt{5}} \qquad J_5 = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Die Seite des regelmäfsigen Fünfzehnecks wird auf folgende Weise erhalten:

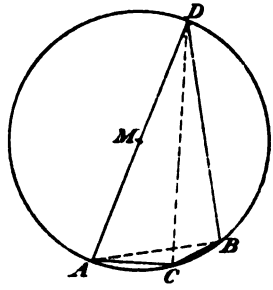


Fig. 183.

Ist AB die Seite des Sechsecks (Fig. 183), AC die des Zehnecks, so ist BC die Seite des Fünfzehnecks.

Der Durchmesser AM schneidet den Kreis in einem Punkte D, der mit A, B und C ein Kreisviereck bestimmt. Es ist also:

$$AD \cdot BC + AC \cdot BD = AB \cdot CD$$

oder

$$2r s_{15} + s_{10}\sqrt{4r^2 - s_6^2} = s_6\sqrt{4r^2 - s_{10}^2},$$

folglich:

$$2r s_{15} + \frac{r^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{r^2}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

oder

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right]$$

$$\varrho_{15} = \frac{r}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$u_{15} = \frac{15r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right]$$

$$i_{15} = \frac{15r^2}{8}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}.$$

8. Die Aufgabe, mit gegebener Seite ein regelmäßiges Vieleck von gegebener Seitenzahl zu zeichnen, kann für alle Vielecke gelöst werden, für die eine Beziehung zwischen der Seite und dem Radius des Umkreises gefunden wurde. So folgt z. B. aus $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ für den Radius des Umkreises:

$$r = \frac{s_5\sqrt{10\,(5 + \sqrt{5})}}{10}.$$

Schreibt man den Ausdruck in folgender Form:

$$r = \sqrt{\frac{s_5}{10} \cdot (5 s_5 + \sqrt{5 s_5 \cdot s_5})},$$

so kann sofort abgelesen werden, wie aus der gegebenen Fünfeckseite der Radius des Umkreises konstruiert werden kann.

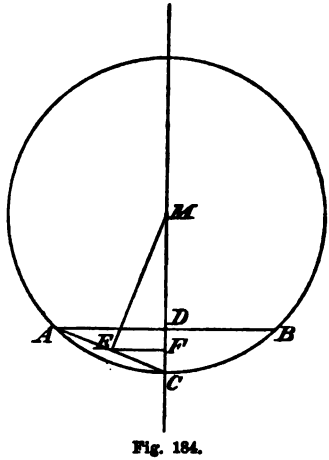


Fig. 184.

9. Ist AB die Seite des regelmäßigen n-ecks (Fig. 184), so bestimmt die Mittelsenkrechte von AB auf dem Kreise eine Ecke des regelmäßigen $2n$-ecks. Fällt man das Lot ME auf AC und das Lot EF auf MC, so ist (§ 37, 3):

$$\varrho_{2n}^2 = r \cdot FM.$$

Nun ist aber:

$$FM = \varrho_n + \frac{r - \varrho_n}{2} = \frac{r + \varrho_n}{2}, \text{ also: } \varrho_{2n} = \sqrt{\frac{r(r + \varrho_n)}{2}}.$$

Andererseits ist aber auch:

$$ACD \sim MEC,$$

folglich:

$$AC \cdot EM = r \cdot AD \text{ oder } s_{2n} \cdot \varrho_{2n} = \frac{r \cdot s_n}{2},$$

also:

$$s_{2n} = \frac{r s_n}{2 \varrho_{2n}} \text{ und } u_{2n} = \frac{r u_n}{\varrho_{2n}}.$$

Die Gleichungen für ϱ_{2n} und u_{2n} genügen, um aus jedem regelmäfsigen Vieleck das regelmäfsige Vieleck doppelter Seitenzahl zu berechnen. Man kann aber auch Gleichungen ableiten, in denen die Umfänge, beziehungsweise die Inhalte, allein vorkommen.

Wir gehen von den bekannten Gleichungen aus (Nr. 7 u. 9):

$$r u_n = \varrho_n U_n, \quad r u_{2n} = \varrho_{2n} U_{2n}, \quad r u_n = \varrho_{2n} u_{2n}.$$

Durch Multiplikation der beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$r^2 u_n = \varrho_{2n}^2 U_{2n}.$$

Da aber $\varrho_{2n}^2 = \frac{r(r + \varrho_n)}{2}$ ist, so folgt weiter:

$$r u_n = \frac{r + \varrho_n}{2} U_{2n}.$$

Somit ergiebt sich:

$$r u_n = \varrho_n U_n = \varrho_{2n} u_{2n} = \frac{r + \varrho_n}{2} U_{2n},$$

oder in Form einer Proportion:

$$\frac{r}{\frac{1}{u_n}} = \frac{\varrho_n}{\frac{1}{U_n}} = \frac{\varrho_{2n}}{\frac{1}{u_{2n}}} = \frac{r + \varrho_n}{2\frac{1}{U_{2n}}}.$$

Nach dem Hauptsatze der Proportionslehre folgt hieraus:

$$\frac{r + \varrho_n}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n}} = \frac{r + \varrho_n}{2\frac{1}{U_{2n}}}, \text{ folglich: } \frac{2}{U_{2n}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{U_n}.$$

Andererseits ist aber das Quadrat irgend eines der gleichen Verhältnisse einer Proportion gleich dem Produkte von zwei andern, also:

$$\frac{\varrho_{2n}^2}{\left(\frac{1}{u_{2n}}\right)^2} = \frac{\frac{r(r+\varrho_n)}{2}}{\frac{1}{u_n}\cdot\frac{1}{U_{2n}}}, \text{ folglich: } \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{u_n}\cdot\frac{1}{U_{2n}}}.$$

Aus dem Umfange irgend eines regelmäfsigen Polygons kann man also die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen Polygons doppelter Seitenzahl für denselben Kreis berechnen.

Ähnliche Gleichungen können für die Inhalte der in Rede stehenden Polygone abgeleitet werden. Durch Multiplikation mit ϱ_n ergiebt sich aus der Gleichung $u_{2n}\varrho_{2n} = ru_n$ die folgende:

$$\varrho_n u_{2n}\varrho_{2n} = ru_n\varrho_n \quad \text{oder} \quad \varrho_n i_{2n} = ri_n.$$

Da regelmäfsige Polygone gleicher Seitenzahl ähnlich sind, ist weiter:

$$r^2 i_n = \varrho_n^2 J_n \quad \text{und} \quad r^2 i_{2n} = \varrho_{2n}^2 J_{2n}.$$

Durch Elimination von i_{2n} aus der letzten und der drittletzten Gleichung erhält man:

$$\varrho_n \varrho_{2n}^2 J_{2n} = r^3 i_n.$$

Aber es ist:

$$\varrho_{2n}^2 = \frac{r(r+\varrho_n)}{2}, \text{ folglich: } \frac{\varrho_n(r+\varrho_n)}{2} J_{2n} = r^2 i_n.$$

Somit ergiebt sich die fortlaufende Gleichung:

$$r^2 i_n = \varrho_n^2 J_n = r\varrho_n i_{2n} = \frac{\varrho_n(r+\varrho_n)}{2} J_{2n}$$

oder in Form einer Proportion:

$$\frac{r^2}{\frac{1}{i_n}} = \frac{\varrho_n^2}{\frac{1}{J_n}} = \frac{r\varrho_n}{\frac{1}{i_{2n}}} = \frac{\varrho_n(r+\varrho_n)}{2\frac{1}{J_{2n}}}.$$

Hieraus folgt aber wieder:

$$\frac{\varrho_n^2 + r\varrho_n}{\frac{1}{J_n} + \frac{1}{i_{2n}}} = \frac{\varrho_n(r+\varrho_n)}{2\frac{1}{J_{2n}}} \quad \text{und} \quad \frac{r^2\varrho_n^2}{\frac{1}{i_n}\frac{1}{J_n}} = \frac{r^2\varrho_n^2}{\frac{1}{i_{2n}^2}},$$

daher auch:

$$\frac{1}{i_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{i_n}\,\frac{1}{J_n}} \quad \text{und} \quad \frac{2}{J_{2n}} = \frac{1}{J_n} + \frac{1}{i_{2n}}.$$

Sind demnach die Inhalte eines ein- und eines umgeschriebenen regelmäfsigen Vielecks von gleicher Seitenzahl bekannt, so können auch die Inhalte des ein- und des umgeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl ohne jede Hilfsgröfse berechnet werden.

10. Zur Berechnung der Diagonalen eines regelmäfsigen Vielecks gelangt man entweder durch den Ptolemäischen Lehrsatz oder durch geometrische Betrachtungen.

Ist z. B. $ABCDE$ ein regelmäfsiges Fünfeck im Kreise vom Radius r, so können je zwei Diagonalen als Grundlinien von zwei kongruenten gleichschenkeligen Dreiecken betrachtet werden; die Diagonalen des Fünfecks sind also gleich. Ist F der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD, so ergiebt die Betrachtung der Winkel der Dreiecke BDC und BCF die Ähnlichkeit derselben. Wenn die Diagonale durch d, die Seite durch s bezeichnet wird, so erhält man also:

$$s^2 = d(d - s)$$

und für die Diagonale:

$$d = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Die Seite wird aus der Diagonale durch Teilung nach dem goldenen Schnitte erhalten.

11. Man denke sich eine Kreislinie in n gleiche Teile geteilt und bei einem ersten Umlaufe um den Kreis die Teilpunkte in ihrer natürlichen Reihenfolge mit den Nummern 0, 1, 2, ..., $n - 1$ versehen (Fig. 185). Die Numerierung soll bei einem zweiten Umlaufe in der Weise fortgesetzt werden, dafs dem Punkte Nr. 0 die Nummer n, dem Punkte Nr. 1 die Nummer $n + 1$ u. s. w., dem Punkte Nr. k die Nummer $n + k$ zugewiesen wird. Setzt man die Umläufe ohne Ende fort, so werden alle Nummern, die Vielfache von n sind, dem Punkte Nr. 0, alle Nummern, die um k gröfser als ein Vielfaches von n sind, dem Punkte Nr. k zufallen. Irgend zwei Nummern, die zu demselben Punkte gehören, werden sich um ein Vielfaches von n unterscheiden, und zwei Num-

mern, deren Differenz kein Vielfaches von n ist, werden verschiedene Punkte bezeichnen.

Sei p eine beliebige ganze Zahl, die kleiner als n ist. Man verbinde, von dem Punkte Nr. 0 ausgehend, alle Punkte, deren Nummer ein Vielfaches von p ist, jeden mit dem folgenden. Die gedachten Punkte tragen die Nummern $0, p, 2p, 3p, 4p \ldots$

Sind n und p teilerfremd, so ist in der Zahlenreihe $0, p, 2p, 3p \ldots$ die $(n+1)^{te}$ Zahl, nämlich die Zahl np, die erste, die ein Vielfaches von n ist. Der Punkt Nr. np

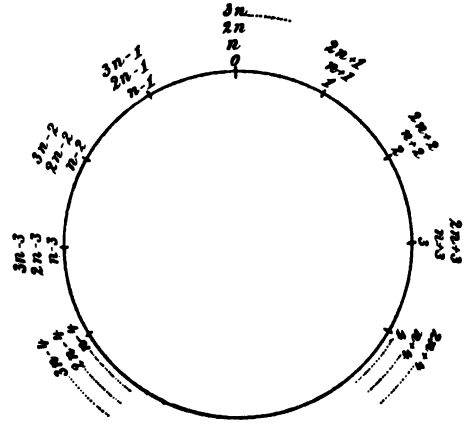


Fig. 185.

ist also unter den verbundenen Punkten der erste, der mit dem Punkte Nr. 0 identisch ist. Greift man unter den Zahlen $0, p, 2p \ldots (n-1)p$ irgend zwei heraus, so ist ihre Differenz kein Vielfaches von n; sie sind also Nummern von verschiedenen Punkten. Da nun die Anzahl der genannten Zahlen gleich n ist, so ist jeder Teilpunkt der Kreislinie mit zwei andern verbunden, und die Gesamtheit dieser Verbindungslinien bildet eine in sich zurücklaufende gebrochene Linie.

Die erhaltene gebrochene Linie kann von der Nr. 0 aus auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden; man erhält also eine mit der frühern identische gebrochene

Linie, wenn man bei dem beschriebenen Verfahren die Zahl p durch die Zahl $n - p$ ersetzt. Die Anzahl aller gebrochenen Linien, die man mit n Punkten erhalten kann, ist also halb so groſs wie die Anzahl der ganzen Zahlen unterhalb n, die mit n keinen Faktor gemein haben.

Im Falle $p = 1$, also auch im Falle $p = n - 1$, erhält man ein regelmäſsiges n-eck. Ist p von 1 verschieden, so ist $np > n$, und der Punkt Nr. 0 wird nicht schon mit dem ersten Umlaufe erreicht. In diesem Falle entsteht eine sternförmige Figur mit n Ecken, ein n-eckiger oder n-seitiger Stern. Die Seiten des Sternes sind Diagonalen des regelmäſsigen n-ecks und können als solche berechnet werden.

Wenn p ein Divisor von n, etwa $n = ps$, ist, so können die Nummern der verbundenen Ecken auch durch die folgenden Zahlen bezeichnet werden: $0, \frac{n}{s}, \frac{2n}{s}, \frac{3n}{s} \ldots$ Ein Blick auf diese Zahlenreihe lehrt, daſs das $(s+1)^{\text{te}}$ Glied, nämlich die Zahl $\frac{sn}{s}$, das erste Vielfache von n in der Reihe ist. Der dieser Nummer entsprechende Punkt ist somit der erste, der mit dem Punkte Nr. 0 identisch ist, und die Ecke Nr. 0 wird schon bei dem ersten Umlaufe erreicht. Da die Anzahl s der vorhergehenden Nummern kleiner als n ist, so bleiben $n - s$ Teilpunkte der Kreislinie unverbunden. Die erhaltene gebrochene Linie bestimmt ein regelmäſsiges s-eck.

Wenn die Zahlen p und n den gröſsten gemeinschaftlichen Divisor D haben, also $n = D\nu$ und $p = D\pi$ ist, so sind ν und π teilerfremd, und die Nummern der verbundenen Teilpunkte können durch folgende Ausdrücke bezeichnet werden:

$$0,\ D\pi,\ 2D\pi,\ 3D\pi \ldots$$

Dann ist die $(\nu+1)^{\text{te}}$ Zahl der Reihe, nämlich $\nu D\pi$, das erste Vielfache von n in der Reihe; der entsprechende Teilpunkt ist identisch mit dem Punkte Nr. 0. Von den ν Punkten, die die vorhergehenden Nummern tragen, sind keine zwei identisch, da für keine zwei die Differenz der Nummern ein Vielfaches von n ist. Die Anzahl der unverbundenen Ecken ist $n - \nu$. Da $\nu D\pi > n$ ist, so wird die Ecke Nr. 0 nicht mit dem ersten Umlaufe erreicht. Es

können nun zwei Fälle eintreten: entweder wird keine Verbindungslinie von einer andern geschnitten, dann begrenzt die erhaltene gebrochene Linie ein regelmäfsiges ν-eck, oder die gebrochene Linie bestimmt einen ν-eckigen Stern.

Übungen zu § 48.

1. Je drei aufeinander folgende Seiten eines regelmäfsigen Polygons bestimmen ein Trapez.

2. Die Umkreise von zwei regelmäfsigen Vielecken gleicher Seitenzahl, von denen das eine dem andern eingeschrieben ist, sind konzentrisch.

3. Jeder Kreis, welcher mit dem Umkreise eines regelmäfsigen Vielecks konzentrisch ist und dessen Seiten schneidet, bestimmt auf diesen die Ecken von zwei regelmäfsigen Polygonen, die einander kongruent sind und mit dem gegebenen Vieleck in der Seitenzahl übereinstimmen.

4. Einem gegebenen Kreise ein regelmäfsiges Vieleck von der Seitenzahl 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20 ein- und umzuschreiben, und von jedem dieser Polygone den Umfang, den Inhalt und die Diagonalen zu berechnen.

5. Mit gegebener Seite ein regelmäfsiges 5-eck, 6-eck, 8-eck, 10-eck, 12-eck, 16-eck, 20-eck zu zeichnen.

6. Einem gegebenen regelmäfsigen Dreieck, Viereck, Sechseck, Achteck, Zehneck ein regelmäfsiges Polygon von gleicher Seitenzahl und gegebener Seite einzuschreiben.

7. Im Kreise vom Radius 0,5 sollen die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen regelmäfsigen 6-ecks, 12-ecks, 24-ecks, 48-ecks berechnet werden.

8. Im Kreise vom Radius 1 sollen die Inhalte des ein- und des umgeschriebenen regelmäfsigen 4-ecks, 8-ecks, 16-ecks, 32-ecks berechnet werden.

9. Wenn zwei Kreise sich so schneiden, daſs die gemeinschaftliche Sehne im ersten Kreise die Seite des regelmäfsigen 10-ecks, im zweiten die Seite des regelmäfsigen 5-ecks ist, so ist der Radius des ersten Kreises doppelt

so groſs wie der Radius des Inkreises des regelmäſsigen 10-ecks im zweiten.

10. Die Diagonalen des regelmäſsigen 5-ecks, 6-ecks, 8-ecks und 10-ecks im Kreise vom Radius r zu berechnen.

11. Im Innern jedes regelmäſsigen n-eckigen Sterns liegt ein regelmäſsiges n-eck, welches für die Werte $n = 5$, 8, 10 unter der Voraussetzung berechnet werden soll, daſs der dem Sterne umgeschriebene Kreis den Radius r hat.

Sechzehntes Kapitel.

Die Kreisberechnung.

§ 49. Die Berechnung der Zahl π.

1. Wird einem gegebenen Kreise ein regelmäfsiges n-eck einbeschrieben und ein ebensolches umbeschrieben und die Kreisfläche durch i bezeichnet (Fig. 186), so lehrt die Anschauung: $i_n < i < J_n$; folglich mufs auch die Mafszahl für die Kreisfläche zwischen den Mafszahlen für die beiden

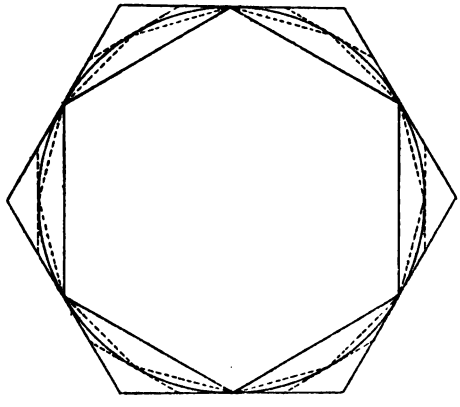


Fig. 186.

Polygone angenommen werden. Letztere können aber berechnet werden, wenn man von den regelmäfsigen Polygonen ausgeht, die im vorigen Kapitel betrachtet wurden.

Aus i_n und J_n können die Flächen des ein- und des umbeschriebenen regelmäfsigen Polygons doppelter Seitenzahl berechnet werden, und es ist wieder $i_{2n} < i < J_{2n}$. Durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl bei den bereits erhaltenen Polygonen gelangt man schliefslich zu zwei regelmäfsigen Vielecken von beliebig grofser Seitenzahl $2^p n$, für die auch die Beziehung gilt:

$$i_{2^p n} < i < J_{2^p n}.$$

Es ist aber:

$$i_{2n} = \sqrt{i_n J_n} \qquad J_{2n} = \frac{2 J_n i_{2n}}{J_n + i_{2n}},$$

folglich:

$$J_{2n} - i_{2n} = \frac{J_n i_{2n} - i_{2n}^2}{J_n + i_{2n}} = \frac{i_{2n}(J_n - i_{2n})}{J_n + i_{2n}}.$$

Aus $i_{2n} > i_n$ folgt weiter:

$$J_n - i_{2n} < J_n - i_n \quad \text{und} \quad J_n + i_{2n} > J_n + i_n,$$

folglich auch:

$$\frac{J_n - i_{2n}}{J_n + i_{2n}} < \frac{J_n - i_n}{J_n + i_n} \quad \text{und} \quad J_{2n} - i_{2n} < i_{2n} \frac{J_n - i_n}{J_n + i_n}.$$

Da $a^2 + b^2 - 2ab > 0$ ist, so ergiebt sich:

$$(a+b)^2 > 4ab \quad \text{und} \quad \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2};$$

das geometrische Mittel ist also stets kleiner als das arithmetische. Mithin ist auch: $i_{2n} < \frac{J_n + i_n}{2}$ und man erhält:

$$J_{2n} - i_{2n} < \frac{J_n - i_n}{2}.$$

Dementsprechend kann man auch die folgenden Ungleichungen aufstellen:

$$J_{4n} - i_{4n} < \frac{J_{2n} - i_{2n}}{2}; \quad J_{8n} - i_{8n} < \frac{J_{4n} - i_{4n}}{2} \ldots$$

$$J_{2^p n} - i_{2^p n} < \frac{J_{2^{p-1} n} - i_{2^{p-1} n}}{2}.$$

Das Produkt dieser Ungleichungen führt schliefslich, nachdem die gleichen Faktoren auf beiden Seiten weggehoben sind, zu der folgenden:

$$J_{2^p n} - i_{2^p n} < \frac{J_n - i_n}{2^p}.$$

Da man durch fortgesetzte Verdoppelung der Seiten des ein- und des umgeschriebenen Vielecks zu Werten von p gelangen kann, die jede noch so grofs gedachte Zahl übertreffen, so gelangt man schliefslich zu Vielecken, für welche die Differenz der Maſszahlen kleiner als eine beliebig kleine, von vornherein vorgeschriebene Zahl ε ist. Die Maſszahlen der gedachten Vielecke sind also gleich, und jede von ihnen ist auch jeder zwischen ihnen angenommenen Zahl gleich, also auch gleich der Maſszahl der Kreisfläche. Es ergiebt sich somit, daſs für jede Kreisfläche eine Maſszahl gefunden werden kann, und daſs der Kreis mit jedem regelmäſsigen Vieleck von hinreichend grofser Seitenzahl identifiziert werden muſs.

2. Sind zwei Kreise mit den Radien r und r' gegeben, so kann für jeden das eingeschriebene regelmäſsige n-eck eintreten, wofern nur die Zahl n hinreichend grofs gedacht wird. Da regelmäſsige Polygone gleicher Seitenzahl ähnlich sind, so sind auch die Kreise als ähnliche Polygone aufzufassen, und es folgt für die Maſszahlen ihrer Inhalte: $\frac{i}{r^2} = \frac{i'}{r'^2}$, d. h. der Quotient aus der Maſszahl des Inhaltes und der des Quadrats über dem Radius ist für alle Kreise derselbe. Wird dies konstante Verhältnis durch π bezeichnet, so erhält man für den Kreis vom Radius r als Inhalt:

$$i = \pi r^2.$$

Für einen hinreichend grofsen Wert von n kann also gesetzt werden:

$$J_n = i_n = r^2 \cdot \pi \quad \text{und} \quad U_n \cdot r = u_n \varrho_n = r^2 \cdot 2\pi.$$

Da nun auch $U_n - u_n$ für einen hinreichend grofsen Wert von n unter jeden beliebig klein gewählten, von vornherein vorgeschriebenen Wert herabsinkt, so ist $U_n = u_n$, also $\varrho_n = r$, und es ergiebt sich für den Umfang u des Kreises: $u = r \cdot 2\pi$. Es bleibt somit nur die Zahl π zu berechnen.

3. Wenn $r = 1$ gewählt wird, so ist $i = \pi$ und $u = 2\pi$, d. h. π ist sowohl die Maſszahl für die Kreisfläche als auch die Maſszahl für den halben Kreisumfang vom Radius 1.

Wenn man die früher abgeleiteten Formeln benutzt:

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right); \quad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{U_{2n}} \cdot \frac{1}{u_n}};$$

$$\frac{1}{i_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{i_n} \cdot \frac{1}{J_n}}; \quad \frac{1}{J_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_n} + \frac{1}{i_{2n}}\right),$$

so kann man in den folgenden Reihen aus den beiden ersten Gliedern alle spätern berechnen:

$$\frac{1}{U_6}, \frac{1}{u_6}, \frac{1}{U_{12}}, \frac{1}{u_{12}}, \frac{1}{U_{24}}, \frac{1}{u_{24}} \cdots \frac{1}{i_6}, \frac{1}{J_6}, \frac{1}{i_{12}}, \frac{1}{J_{12}} \cdots$$

Die Formeln lehren, daſs in der ersten Reihe jedes Glied ungerader Stelle das arithmetische Mittel, jedes Glied gerader Stelle das geometrische Mittel aus seinen beiden Vordergliedern ist, daſs aber in der zweiten Reihe das umgekehrte Gesetz gilt. Die erste Reihe liefert den reziproken Wert von 2π, die zweite den von π selbst. Die Ergebnisse der Rechnung sind in nebenstehender Tabelle zusammengestellt (Seite 335), wo allgemein die reziproken Werte von u_n und i_n durch u'_n und i'_n bezeichnet sind.

Der Wert von π, der sich aus dem Mittel der beiden letzten Zahlen jeder Reihe ergiebt, ist:

$$\pi = 3{,}14159.$$

4. Geht man bei der Berechnung von π von einem bestimmten regelmäſsigen n-eck aus, so kann man fragen, bis zu welchem Vieleck man fortschreiten muſs, um für $\frac{1}{2\pi}$, bez. $\frac{1}{\pi}$, zwei Grenzwerte zu erhalten, die sich um weniger als $\frac{1}{10^k}$, also um weniger als eine Einheit der k^{ten} Dezimalstelle, unterscheiden.

Bezeichnet wieder u'_n den reziproken Wert von u_n, so ist:

$$U'_{2n} = \frac{U'_n + u'_n}{2} \quad \text{und} \quad u'_{2n} = \sqrt{U'_{2n} u'_n},$$

also:

$$u'_{2n} - U'_{2n} = \sqrt{U'_{2n}\, u'_n} - \frac{U'_n + u'_n}{2}.$$

Da nun das geometrische Mittel zweier Zahlen kleiner als

U'_6	0,144338	i'_6	0,384900
u'_6	0,166667	J'_6	0,288675
U'_{12}	0,155502	i'_{12}	0,333333
u'_{12}	0,160988	J'_{12}	0,311004
U'_{24}	0,158245	i'_{24}	0,321975
u'_{24}	0,159610	J'_{24}	0,316490
U'_{48}	0,158928	i'_{48}	0,319221
u'_{48}	0,159269	J'_{48}	0,317855
U'_{96}	0,159098	i'_{96}	0,318537
u'_{96}	0,159183	J'_{96}	0,318196
U'_{192}	0,159141	i'_{192}	0,318367
u'_{192}	0,159162	J'_{192}	0,318282
U'_{384}	0,159152	i'_{384}	0,318324
u'_{384}	0,159157	J'_{384}	0,318303
U'_{768}	0,159154	i'_{768}	0,318314
u'_{768}	0,159156	J'_{768}	0,318308
U'_{1536}	0,159155	i'_{1536}	0,318311
u'_{1536}	0,159154	J'_{1536}	0,318310

ihr arithmetisches Mittel ist, so folgt weiter:

$$u'_{2n} - U'_{2n} < \frac{U'_{2n} + u'_n}{2} - \frac{U'_n + u'_n}{2},$$

mithin, wenn auf der rechten Seite für U'_{2n} der obige Wert eingesetzt wird:

$$u'_{2n} - U'_{2n} < \frac{u'_n - U'_n}{4}.$$

Hieraus kann wieder in ähnlicher Weise wie früher gefolgert werden:

$$u'_{2^p n} - U'_{2^p n} < \frac{u'_n - U'_n}{4^p}.$$

Damit der Unterschied der Grenzwerte für $\frac{1}{2\pi}$ kleiner als $\frac{1}{10^k}$ werde, mufs also die Ungleichung bestehen:

$$\frac{u'_n - U'_n}{4^p} < \frac{1}{10^k} \text{ oder } 4^p > 10^k (u'_n - U'_n).$$

Geht man von dem 6-eck aus, so ist:

$$u'_n - U'_n = 0{,}0223,$$

also wird man sicher die gewünschte Genauigkeit erhalten, wenn man für $u'_6 - U'_6$ den etwas gröfsern, aber für die Rechnung bequemern Wert 0,025 einsetzt. Dann ist:

$$4^p > 10^k \cdot 0{,}025; \quad 4^p > 10^{k-2} \cdot 25; \quad 4^p > \frac{10^{k-1}}{4};$$

$$p \log 4 > k - 1 - \log 4; \quad p > \frac{k-1}{\log 4} - 1.$$

Setzt man für log 4 den etwas kleinern Wert 0,6 ein, so folgt:

$$p > \frac{k - 1{,}6}{0{,}6} \text{ oder } p > \frac{5k - 8}{3}.$$

Soll der Unterschied der Grenzwerte weniger als eine Einheit der 6. Dezimalstelle betragen, so ergiebt sich demnach:

$$p > \frac{22}{3}, \text{ also } p = 8.$$

Man mufs also bis zu dem regelmäfsigen Vieleck von der Seitenzahl $2^8 \cdot 6$, d. h. bis zu dem 1536-eck fortschreiten.

Eine ähnliche Betrachtung kann für die Grenzwerte angestellt werden, die $\frac{1}{\pi}$ einschliefsen.

5. Bereits früher wurde gezeigt, dafs für eine hinreichend grofse Seitenzahl die Mafszahlen der Radien des Umkreises und des Inkreises eines regelmäfsigen Vielecks

einander gleich werden. Da ein solches Polygon mit einem Kreise identifiziert werden muſs, so ist also:

$$u_n = 2\pi r = 2\pi\varrho_n .$$

Man kann somit die Zahl π erhalten, wenn man den halben Umfang eines regelmäſsigen Polygons von hinreichend groſser Seitenzahl durch den Radius seines Umkreises oder seines Inkreises dividiert.

Sei nun u_n der gegebene Umfang eines regelmäſsigen Polygons, seien r_n und ϱ_n die Radien seines Umkreises und seines Inkreises. Unter s'_{2n}, r'_{2n} und ϱ'_{2n} sollen beziehungsweise die Seite, der Radius des Umkreises und der Radius des Inkreises eines regelmäſsigen Polygons verstanden werden, welches mit dem gegebenen n-eck in dem Umfange übereinstimmt, aber die doppelte Seitenzahl hat. Da alle regelmäſsigen Polygone gleicher Seitenzahl ähnlich sind, so ist:

$$\frac{s'_{2n}}{s_{2n}} = \frac{\varrho'_{2n}}{\varrho_{2n}} .$$

Da aber $2s'_{2n} = s_n$, so folgt:

$$\varrho'_{2n} = \frac{s_n \varrho_{2n}}{2 s_{2n}} .$$

Nun ist aber auch:

$$\frac{s_n^2}{4} = r_n^2 - \varrho_n^2; \quad \varrho_{2n}^2 = \frac{r_n (r_n + \varrho_n)}{2}; \quad s_{2n}^2 = 2 r_n (r_n - \varrho_n),$$

somit ergiebt sich:

$$\varrho'_{2n} = \frac{r_n + \varrho_n}{2} .$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden $2n$-ecke folgt weiter:

$$\frac{r'_{2n}}{\varrho'_{2n}} = \frac{r_n}{\varrho_{2n}} ,$$

woraus man nach Einsetzung der Werte von ϱ'_{2n} und ϱ_{2n} erhält:

$$r'^2_{2n} = \frac{r_n (r_n + \varrho_n)}{2} \quad \text{oder} \quad r'_{2n} = \sqrt{r_n \varrho'_{2n}} .$$

Durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl unter Beibehaltung des Umfanges gelangt man schlieſslich zu den

Radien eines regelmäfsigen Polygons, welche mit Hilfe des bekannten Umfanges u_n einen Wert von π ergeben.

Bildet man die Reihe ϱ_6, r_6, ϱ'_{12}, r'_{12}, ϱ'_{2n}, r'_{2n}, ... und nimmt den gegebenen Umfang u_6 gleich 2 an, so sind die hinreichend weit entfernten Glieder der Reihe mit dem reziproken Werte von π zu identifizieren. Es ist dann:

$$\varrho_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ und } r_6 = \frac{1}{3}.$$

Nun ist aber im Kreise vom Radius eins:

$$J_6 = \frac{6}{\sqrt{3}} \text{ und } i_{12} = 3.$$

Die beiden ersten Glieder der obigen Reihe sind also dem zweiten und dem dritten Gliede der früher gebildeten Reihe i'_6, J'_6, i'_{12}, J'_{12}, i'_{2n}, J'_{2n}, ... beziehungsweise gleich. Berücksichtigt man nun, dafs die spätern Glieder in beiden Reihen nach denselben Gesetzen aus ihren Vordergliedern berechnet werden, so ergiebt sich, dafs die Glieder der neuen Reihe mit den Gliedern der frühern vom zweiten ab übereinstimmen.

6. Wenn der Centriwinkel, der im Kreise vom Radius r zu einem gegebenen Sektor gehört, die Maſszahl a hat, so wird die Maſszahl des Sektors durch $\frac{r^2 \pi a}{360}$ ausgedrückt.

Jeder Sektor wird durch die Sehne, die die Endpunkte des zugehörigen Bogens verbindet, in ein gleichschenkeliges Dreieck und ein Segment zerlegt. Letzteres kann daher berechnet werden, sobald jenes Dreieck das Bestimmungsdreieck eines regelmäfsigen Vielecks ist, dessen Seite bestimmt werden kann.

Übungen zu § 49.

1. Unter der Voraussetzung, dafs von einem regelmäfsigen n-eck der Radius des Umkreises und der des Inkreises bekannt sind, sollen von einem regelmäfsigen Polygon von doppelter Seitenzahl aber gleichem Inhalte die Quadrate der Radien des Umkreises und des Inkreises berechnet werden. Unter Benutzung der erhaltenen Gleichungen soll die Zahl π berechnet werden.

2. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang (Inhalt) gleich der Summe der Umfänge (Inhalte) von 2 oder 3 gegebenen Kreisen ist.

3. Die Maſszahl für den Inhalt eines Ringes zu berechnen, der durch zwei konzentrische Kreise begrenzt wird.

4. Einen gegebenen Kreis durch einen konzentrischen zu halbieren.

5. Um einen gegebenen Kreis mit Hilfe eines konzentrischen Kreises einen Ring zu legen, der das Dreifache des gegebenen Kreises beträgt.

6. Einen gegebenen Kreis durch zwei zu ihm konzentrische Kreise im Verhältnis von drei gegebenen Strecken zu teilen.

7. In einen gegebenen Kreis sollen n gleiche Kreise eingezeichnet werden, von denen jeder den gegebenen Kreis und seine beiden Nachbarkreise berührt. Welches sind die Maſszahlen für diejenigen Teile des gegebenen Kreises, die von den gesuchten Kreisen nicht gedeckt werden.

8. Beschreibt man über einer Seite eines regelmäſsigen n-ecks als Durchmesser den auſserhalb des Umkreises liegenden Halbkreis, so begrenzt dieser mit dem Umkreise eine Sichel, die für jedes der bekannten Polygone berechnet werden soll. Bei welchem Vieleck ist die Sichel einer geradlinig begrenzten Fläche gleich?

9. Die auſserhalb des Umkreises liegenden Halbkreise über den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks bestimmen mit dem Umkreise zwei Sicheln, deren Summe dem Inhalte des Dreiecks gleich ist.

Siebzehntes Kapitel.

Harmonische Gebilde.

§ 50. Harmonische Punkte und Strahlen.

1. Wenn in dem Dreieck ABS (Fig. 187) die Halbierungslinien der Winkel in S die Gerade AB in C und D schneiden, so ist:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Zieht man durch A eine beliebige Gerade, so ist das Ver-

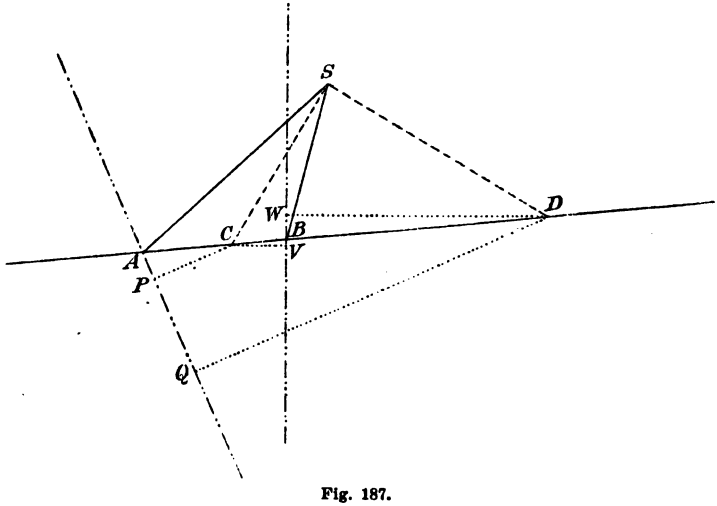


Fig. 187.

hältnis ihrer Abstände von den Punkten C und D gleich $\frac{AC}{AD}$;

ebenso ist für jede durch B gehende Gerade das Verhältnis der Abstände von den Punkten C und D gleich $\frac{BC}{BD}$. Somit sind für alle Geraden, die durch A und B gehen, die Verhältnisse der Abstände von den Punkten C und D einander gleich.

Die Gesamtheit der Geraden, die durch einen und denselben Punkt P gehen, bildet den Strahlenbüschel P; P heifst der Scheitel des Büschels. Ein Strahl des Büschels P soll durch p, sein Abstand von dem Punkte Q durch (pQ) bezeichnet werden. Unter Anwendung dieser Schreibweise kann das Ergebnis, welches für alle Strahlen der Büschel A und B festgestellt wurde, in der Gleichung ausgesprochen werden:

$$\frac{(aC)}{(aD)} = \frac{(bC)}{(bD)}.$$

Wenn für alle Strahlen der Büschel A und B die Verhältnisse der Abstände von den Punkten C und D einander gleich sind, so sagt man, die Punkte A und B werden durch die Punkte C und D harmonisch getrennt.

Wenn in den Büscheln A und B je ein Strahl (z. B. a und b) der Gleichung $\frac{(aC)}{(aD)} = \frac{(bC)}{(bD)}$ genügt und die vier Punkte in derselben Geraden liegen, so gilt die Gleichung für alle Strahlen der genannten Büschel, und die Punkte A und B werden durch C und D harmonisch getrennt.

Wenn die Gleichung $\frac{(aC)}{(aD)} = \frac{(bC)}{(bD)}$ für je einen Strahl der Büschel A und B als richtig erkannt ist, aber die vier Punkte A, B, C und D nicht in einer und derselben Geraden liegen, so sagt man, die Strahlen a und b werden durch die Punkte C und D harmonisch getrennt.

2. Unter der Voraussetzung, dafs die Punkte A und B durch die Punkte C und D harmonisch getrennt werden, ziehe man durch C und D je einen beliebigen Strahl (Fig. 188). Dann ist:

$$\frac{(cA)}{(cB)} = \frac{CA}{CB} \quad \text{und} \quad \frac{(dA)}{(dB)} = \frac{DA}{DB}.$$

Für die Strahlen a und b der Büschel A und B ist aber auch:

$$\frac{(aC)}{(aD)} = \frac{AC}{AD} \quad \text{und} \quad \frac{(bC)}{(bD)} = \frac{BC}{BD}.$$

Da die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen nach

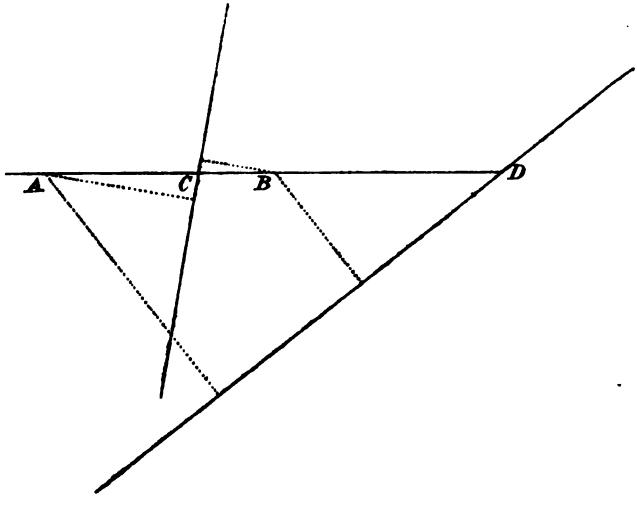


Fig. 188.

Voraussetzung gleich sind, so ergiebt sich:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} \quad \text{oder} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB},$$

mithin auch:

$$\frac{(cA)}{(cB)} = \frac{(dA)}{(dB)}.$$

Somit erhält man den Satz:

Wenn die Punkte A und B durch die Punkte C und D harmonisch getrennt sind, so werden auch C und D durch A und B harmonisch getrennt. (Vgl. § 44, Übung Nr. 33.)

Von den beiden Punktpaaren A, B und C, D besitzt also keines einen Vorzug vor dem andern, man pflegt daher die vier Punkte kurzweg als harmonische Punkte oder als

harmonische Punktreihe zu bezeichnen. Zwei getrennte Punkte einer harmonischen Punktreihe heifsen zugeordnet. Bei der Aufzählung von harmonischen Punkten werden zuerst zwei zugeordnete, dann die beiden andern angegeben.

3. In dem Dreieck ABS (Fig. 189) sollen die Geraden SA und SB beziehungsweise durch a und b bezeichnet werden, die zu AB gehörige Mittellinie durch c, die durch S gehende Parallele zu AB durch d. Es seien p und q die Abstände

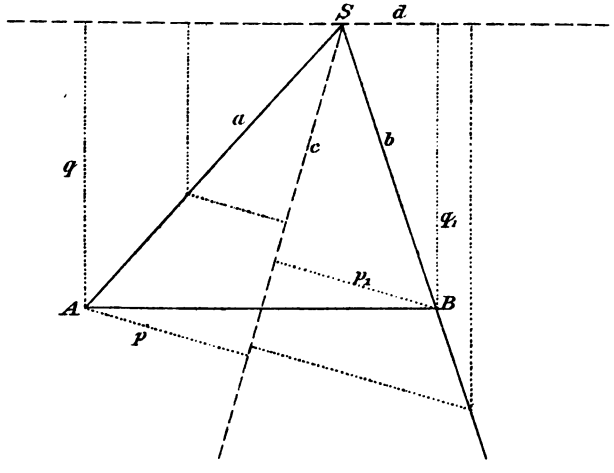


Fig. 189.

des Punktes A, p_1 und q_1 die des Punktes B von den Geraden c und d.

Für jeden Punkt der Geraden a ist, wie sich mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken ergiebt, das Verhältnis der Abstände von den Geraden c und d gleich $\frac{p}{q}$, und für jeden Punkt des Strahles b ist das Verhältnis der Abstände von denselben Geraden gleich $\frac{p_1}{q_1}$. Da aber $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ ist, so sind für alle Punkte, die auf den Geraden a und b liegen, die Verhältnisse der Abstände von den Geraden c und d einander gleich.

Die Gesamtheit der Punkte einer Geraden p bildet die Punktreihe p. Ein Punkt der Punktreihe p wird durch P, sein Abstand von der Geraden q durch (Pq) bezeichnet. Unter Anwendung dieser Schreibweise kann das Ergebnis, welches oben für die Punkte der Punktreihen a und b festgestellt wurde, durch die Gleichung ausgedrückt werden:

$$\frac{(Ac)}{(Ad)} = \frac{(Bc)}{(Bd)}.$$

Wenn für alle Punkte der Punktreihen a und b die Verhältnisse der Abstände von den Strahlen c und d einander gleich sind, so sagt man, die Strahlen a und b werden durch die Strahlen c und d harmonisch getrennt.

Wenn in den Punktreihen a und b je ein Punkt (z. B. A und B) der Gleichung $\frac{(Ac)}{(Ad)} = \frac{(Bc)}{(Bd)}$ genügt und die vier Strahlen durch denselben Punkt gehen, so gilt die Gleichung

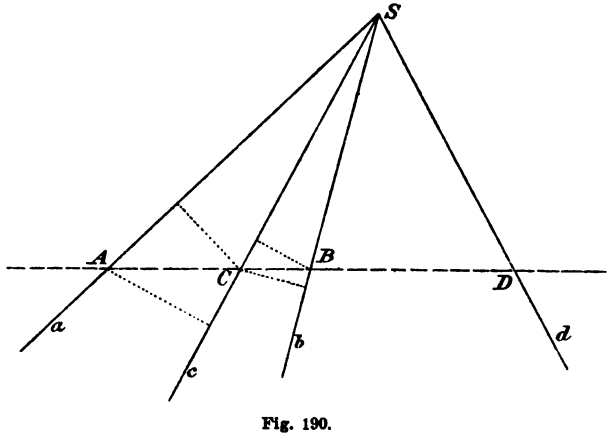


Fig. 190.

für alle Punkte der genannten Punktreihen, und die Strahlen a und b werden durch die Strahlen c und d harmonisch getrennt.

Wenn die Gleichung $\frac{(Ac)}{(Ad)} = \frac{(Bc)}{(Bd)}$ für je einen Punkt der Punktreihen a und b als richtig erkannt ist, aber die

vier Strahlen nicht durch einen und denselben Punkt gehen, so sagt man, die Punkte A und B werden durch die Strahlen c und d harmonisch getrennt.

4. Unter der Voraussetzung, daſs die Strahlen a und b durch die Strahlen c und d harmonisch getrennt werden, nehme man auf c und d je einen Punkt an (Fig. 190). Dann ergiebt sich mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{(Ca)}{(Ac)} = \frac{SC}{SA} \quad \text{und} \quad \frac{(Cb)}{(Bc)} = \frac{SC}{SB},$$

folglich:

$$\frac{(Ca)}{(Ac)} : \frac{(Cb)}{(Bc)} = \frac{SB}{SA}.$$

Auf ähnlichem Wege erhält man:

$$\frac{(Da)}{(Ad)} = \frac{SD}{SA} \quad \text{und} \quad \frac{(Db)}{(Bd)} = \frac{SD}{SB},$$

folglich:

$$\frac{(Da)}{(Ad)} : \frac{(Db)}{(Bd)} = \frac{SB}{SA}.$$

Die beiden für $\frac{SB}{SA}$ gefundenen Werte führen zu der Gleichung:

$$\frac{(Ca)}{(Ac)} : \frac{(Cb)}{(Bc)} = \frac{(Da)}{(Ad)} : \frac{(Db)}{(Bd)} \quad \text{oder} \quad \frac{(Ca)}{(Cb)} : \frac{(Ac)}{(Bc)} = \frac{(Da)}{(Db)} : \frac{(Ad)}{(Bd)}.$$

Nach Voraussetzung ist aber:

$$\frac{(Ac)}{(Ad)} = \frac{(Bc)}{(Bd)} \quad \text{oder} \quad \frac{(Ac)}{(Bc)} = \frac{(Ad)}{(Bd)},$$

folglich erhält man schliefslich:

$$\frac{(Ca)}{(Cb)} = \frac{(Da)}{(Db)}.$$

In Worten:

Wenn die Strahlen a und b durch die Strahlen c und d harmonisch getrennt sind, so werden auch c und d durch a und b harmonisch getrennt.

Von den beiden Strahlenpaaren a, b und c, d besitzt also keines einen Vorzug vor dem andern, man nennt sie daher kurzweg harmonische Strahlen oder harmonischen

Büschel. Zwei getrennte Strahlen des harmonischen Büschels heifsen zugeordnet. Bei der Aufzählung von harmonischen Strahlen werden zuerst zwei zugeordnete, dann die beiden andern angegeben.

5. Es seien a, b, c, d vier Strahlen eines Büschels, A, B, C, D ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden (Fig. 191).

Die Gleichung $\frac{(aC)}{(aD)} = \frac{(bC)}{(bD)}$, welche ausdrückt, dafs A und B durch C und D harmonisch getrennt werden, sagt in der Form $\frac{(Ca)}{(Cb)} = \frac{(Da)}{(Db)}$ aus, dafs die Strahlen c und d durch die Strahlen a und b harmonisch getrennt werden.

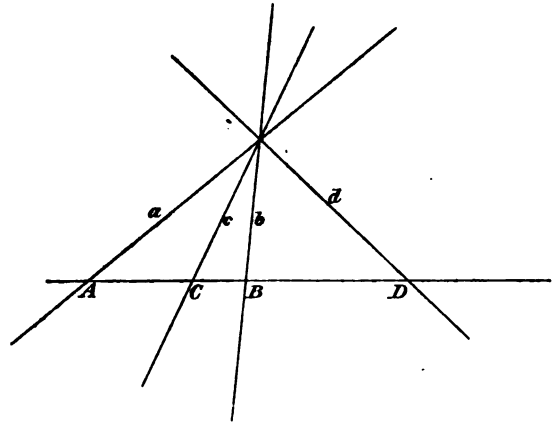


Fig. 191.

Die Behauptung, dafs A, B, C, D harmonische Punkte, und die Behauptung, dafs a, b, c, d harmonische Strahlen sind, werden also durch eine und dieselbe Gleichung ausgesprochen.

Wenn man von einem Punkte aus die Strahlen nach beliebig vielen andern Punkten zieht, so sagt man, diese Punkte werden von jenem aus projiziert. Unter Anwendung dieses Ausdruckes lautet das gefundene Ergebnis:

Harmonische Strahlen werden von jeder Geraden in harmonischen Punkten geschnitten, und

harmonische Punkte werden von jedem Punkte aus durch harmonische Strahlen projiziert.

Ist die Gleichung $\frac{(aC)}{(aD)} = \frac{(bC)}{(bD)}$ für zwei Strahlen a und b und zwei Punkte C und D gültig, so werden die genannten Strahlen durch die genannten Punkte harmonisch getrennt. Die mit jener identische Gleichung $\frac{(Ca)}{(Cb)} = \frac{(Da)}{(Db)}$ sagt aus, dafs auch die Punkte C und D durch die Strahlen a und b harmonisch getrennt werden.

6. Wird der harmonische Büschel $(abcd)$ durch eine

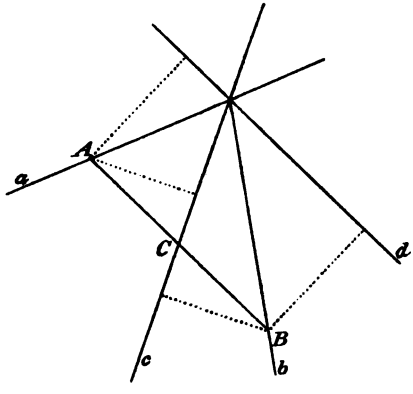


Fig. 192.

Parallele zu d geschnitten (Fig. 192), so sind in der Gleichung $\frac{(Ac)}{(Ad)} = \frac{(Bc)}{(Bd)}$ die Nenner gleich, folglich:

$$(Ac) = (Bc).$$

Daraus folgt aber wieder mit Hilfe von kongruenten Dreiecken:

$$AC = BC.$$

In Worten:

Auf jeder Parallele zu einem von vier harmonischen Strahlen wird durch die drei andern eine halbierte Strecke bestimmt.

7. Stehen in dem harmonischen Büschel $(abcd)$ die Strahlen c und d aufeinander senkrecht (Fig. 193), so be-

stimmt jede Parallele zu d mit den drei andern Strahlen ein Dreieck, in dem eine Mittellinie mit der zugehörigen Höhe zusammenfällt. Das Dreieck ist also gleichschenkelig, und die genannte Mittellinie, nämlich der Strahl c, halbiert den Winkel an der Spitze, nämlich den Winkel (ab). Der Nebenwinkel dieses Winkels wird also durch d halbiert. In Worten:

Wenn in einem harmonischen Büschel zwei zugeordnete Strahlen aufeinander senkrecht stehen, so halbieren sie die Winkel der beiden andern.

8. Soll zu drei gegebenen Punkten A, B und C der Geraden g der vierte harmonische konstruiert werden, so

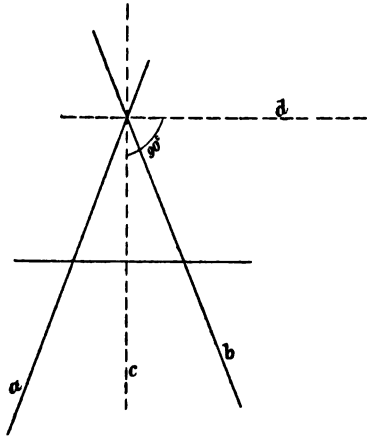


Fig. 193.

muſs ein harmonischer Büschel so gezeichnet werden, daſs drei seiner Strahlen a, b und c beziehungsweise durch A, B und C gehen; der vierte Strahl d schneidet dann die Gerade g in dem gesuchten Punkte. Berücksichtigt man nun, daſs zwei Seiten eines Dreiecks, die durch ihren Schnittpunkt gehende Parallele zu der dritten Seite und die zu der dritten Seite gehörige Mittellinie einen harmonischen Büschel bilden, so ergiebt sich folgende Konstruktion (Fig. 194):

Man nehme B als Mittelpunkt einer beliebigen Strecke PQ an, die nicht in der Geraden g liegt, ziehe durch A die Parallele zu PQ und bringe sie mit der Geraden PC

in S zum Durchschnitt. Dann schneidet SQ die Gerade AB in dem gesuchten Punkte.

Bleiben die Punkte S, A und B fest, während C sich auf g bewegt, so lehrt ein Blick in die Figur, daſs die Punkte P und Q, folglich auch die Punkte C und D, sich in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Fällt C mit B zusammen, so kommt auch D mit B zur Deckung.

Wenn C nach dem Mittelpunkte von AB rückt, so wird SQ zu AB parallel. Um auch in diesem Falle von harmonischen Punkten auf der Geraden AB sprechen zu können, nimmt man auf jeder Geraden einen unendlich fernen Punkt

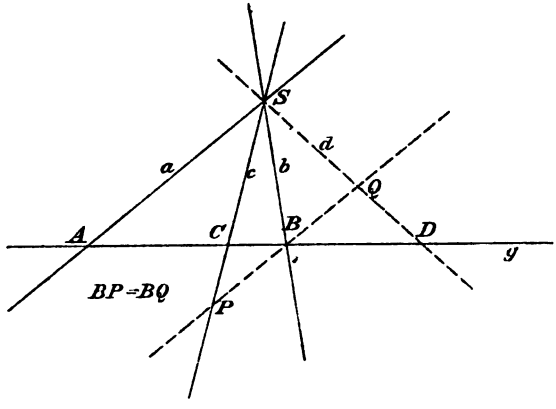


Fig. 194.

an und sagt von parallelen Geraden, daſs sie sich im Unendlichen schneiden. Die Endpunkte einer Strecke, ihr Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt der durch die Strecke bestimmten Geraden bilden demnach eine harmonische Punktreihe.

9. Wenn zu drei Strahlen a, b und c des Strahlenbüschels G der vierte harmonische konstruiert werden soll, so muſs eine harmonische Punktreihe so gezeichnet werden, daſs drei ihrer Punkte A, B und C beziehungsweise auf a, b und c liegen; der vierte Punkt bestimmt dann mit G den gesuchten Strahl. Berücksichtigt man nun, daſs zwei Ecken eines Dreiecks und die Fuſspunkte der Winkelhalbierenden an der Gegenecke vier harmonische

Punkte sind, so ergiebt sich die folgende Konstruktion (Fig. 195):

Man nehme b als Halbierungslinie eines beliebigen Winkels (pq) an, dessen Scheitel nicht mit G zusammenfällt, errichte in dem Scheitel das Lot auf b, bringe das Lot mit a zum Durchschnitt und verbinde diesen Schnittpunkt mit dem der Geraden p und c. Diese Verbindungs-

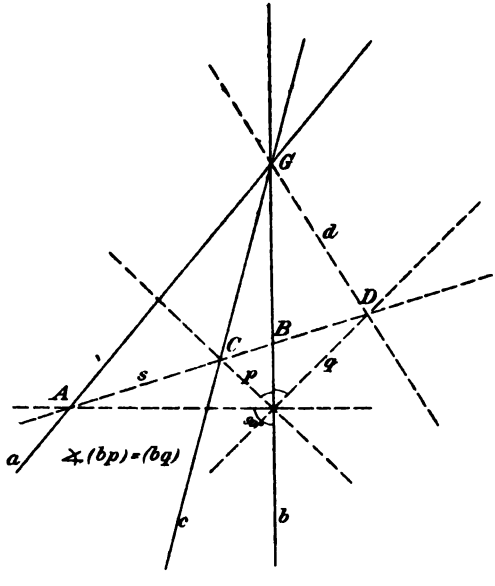


Fig. 195.

linie s schneidet q in einem Punkte, der mit G den gesuchten Strahl bestimmt.

Bleiben die Strahlen a, b und s fest, während c sich um G dreht, so lehrt ein Blick in die Figur, dafs die Strahlen p und q, folglich auch die Strahlen c und d, sich in entgegengesetzten Richtungen drehen. Fällt c mit b zusammen, so gelangt auch d mit b zur Deckung. Halbiert c den Winkel (ab), so wird der Nebenwinkel durch d halbiert.

Da für Parallelen ein Schnittpunkt im Unendlichen angenommen wurde, so müssen vier Parallelen, die durch

vier harmonische Punkte gehen, als harmonische Strahlen aufgefafst werden.

10. Vier Gerade, von denen keine drei sich in einem und demselben Punkte schneiden, bilden ein vollständiges Vierseit. Ihre sechs Schnittpunkte heifsen die Ecken desselben, der Schnittpunkt zweier Seiten die Gegenecke zu dem Schnittpunkte der beiden andern Seiten.

Es seien A, B, C, D, E, F die Ecken eines vollständigen Vierseits (Fig. 196). Wird durch die Ecke E der

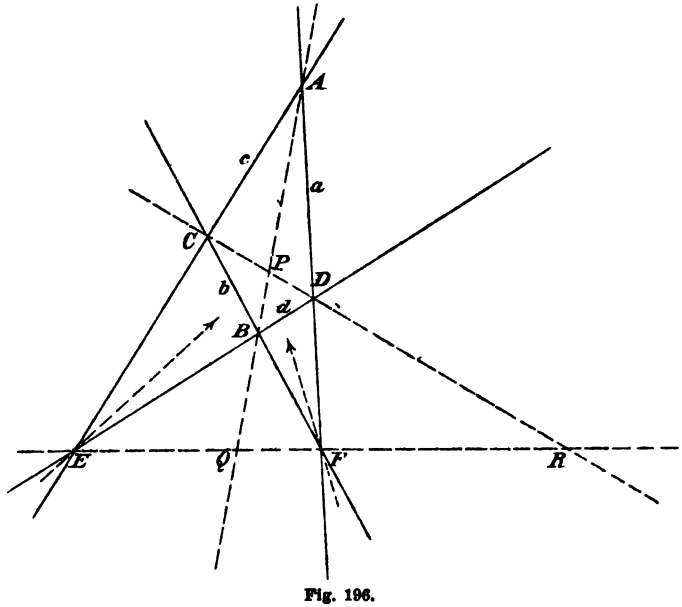


Fig. 196.

vierte harmonische Strahl zu EA, EB, EQ gezeichnet, so schneidet dieser die Gerade AB in dem vierten harmonischen Punkte zu A, B und Q und die Gerade CD in dem vierten harmonischen Punkte zu C, D und R. Zeichnet man in F, der Gegenecke von E, den vierten harmonischen Strahl zu FA, FB und FQ, so schneidet er AB wieder in dem vierten harmonischen Punkte zu A, B und Q und auch CD wieder in dem vierten harmonischen Punkte zu C, D und R. Da zu drei gegebenen Punkten der vierte harmonische eindeutig

bestimmt ist, so liegt der Schnittpunkt der durch E und F gelegten Strahlen sowohl auf der Geraden AB als auch auf der Geraden CD, mithin in dem Schnittpunkte P dieser Geraden. Somit sind $(ABQP)$ und $(CDRP)$ je vier harmonische Punkte.

Nun sind aber auch die Strahlen, die $(CDRP)$ von A aus projizieren, harmonische Strahlen, also $(EFRQ)$ harmonische Punkte. So ergiebt sich der Satz:

Je zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden durch die Verbindungslinien der beiden andern Paare von Gegenecken harmonisch getrennt.

11. Vier Punkte, von denen keine drei in einer und derselben Geraden liegen, bilden ein vollständiges Viereck. Ihre sechs Verbindungslinien heifsen die Seiten desselben, die Verbindungslinie zweier Ecken die Gegenseite der Verbindungslinie der beiden andern Ecken.

Wie schon bei den Definitionen der harmonischen Punkte und Strahlen, sowie bei den über die harmonischen Punktgebilde und Strahlengebilde abgeleiteten Sätzen, so tritt auch bei den Definitionen des vollständigen Vierseits und des vollständigen Vierecks eine eigentümliche Beziehung auf. Diese Beziehung äufsert sich darin, dafs aus jeder Aussage über die eine Figur eine für die andre geltende Aussage gewonnen wird, wenn man jeden Punkt durch eine entsprechende Gerade, jede Gerade durch einen entsprechenden Punkt und folgerichtig jede Verbindungslinie zweier Punkte durch den Schnittpunkt der entsprechenden Geraden und jeden Schnittpunkt zweier Geraden durch die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte ersetzt. Diese eigentümliche Beziehung zweier Figuren pflegt man als Beziehung der Reziprozität zu bezeichnen. Es ist zweckmäfsig, die Beziehung der Reziprozität auch bei den Bezeichnungen durchzuführen: sowie die Verbindungslinie der Punkte A und B durch AB ausgedrückt wird, so soll nun auch der Schnittpunkt der Geraden p und q durch pq bezeichnet werden.

Es seien a, b, c, d, e, f die Seiten eines vollständigen Vierecks (Fig. 197). Wird auf der Geraden e der vierte harmonische Punkt zu ea, eb und eq gezeichnet, so wird dieser von dem Punkte ab aus durch den vierten harmonischen Strahl zu a, b und q, und von dem Punkte cd aus durch den vierten harmonischen Strahl zu c, d und r projiziert. Zeichnet

man auf f, der Gegenseite von e, den vierten harmonischen Punkt zu fa, fb und fq, so wird dieser wieder von ab aus durch den vierten harmonischen Strahl zu a, b und q, und auch von cd aus wieder durch den vierten harmonischen Strahl zu c, d und r projiziert. Da zu drei gegebenen Strahlen der vierte harmonische eindeutig bestimmt ist, so geht

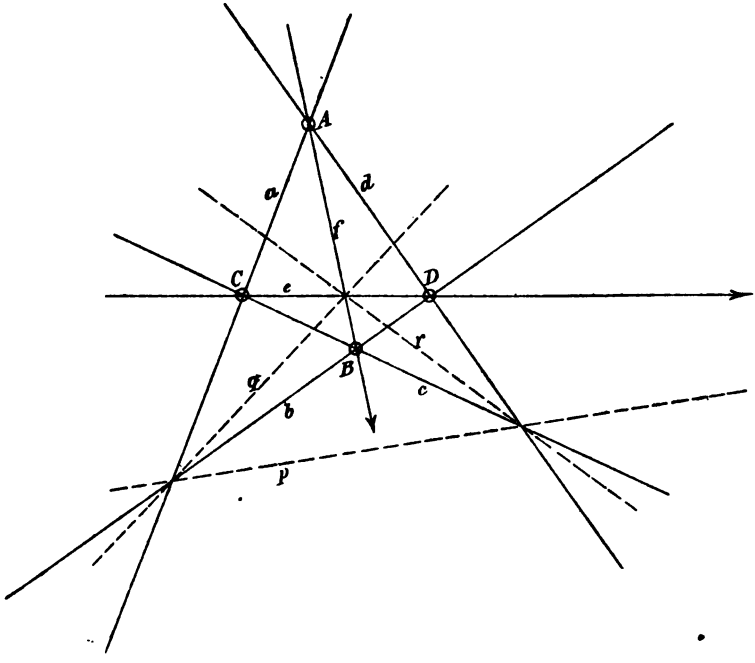


Fig. 197.

die Verbindungslinie der auf e und f gezeichneten Punkte sowohl durch den Punkt ab als auch durch den Punkt cd, fällt also mit der Verbindungslinie p dieser Punkte zusammen. Daher sind $(abqp)$ und $(cdrp)$ je vier harmonische Strahlen.

Nun sind aber auch die Punkte, in denen die Strahlen $(cdrp)$ von a geschnitten werden, harmonische Punkte, also $(efrq)$ harmonische Strahlen. So ergiebt sich der Satz:

Je zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden durch die Schnittpunkte der beiden andern Paare von Gegenseiten harmonisch getrennt.

12. Wenn zur Konstruktion eines vollständigen Vierseits zwei Gegenecken E und F und die Verbindungslinie AB eines andern Paares von Gegenecken gegeben sind, ohne daſs jedoch die Punkte A und B selbst vorgeschrieben wären, so kann man unzählig viele vollständige Vierseite zeichnen, die die genannten Gebilde gemein haben. In allen diesen Vierseiten geht aber die Verbindungslinie des dritten Paares von Gegenecken durch einen und denselben Punkt, nämlich durch den vierten harmonischen zu E, F und Q (Fig. 196). Man erhält daher den Satz:

Die Gesamtheit der Strahlen, die von einem gegebenen durch zwei gegebene Punkte harmonisch getrennt werden, ist identisch mit der Gesamtheit der Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Scheitel auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegt.

Wird EF durch die Gerade AB halbiert und ist eine dritte Ecke C des Vierseits gegeben, so führt die Konstruktion zu einer Geraden durch C, die zu der gegebenen halbierten Strecke parallel ist.

Wenn auſser den Gegenecken E und F die Gerade CD parallel zu EF gegeben ist, ohne daſs jedoch C und D selbst gegeben wären, so führt die Konstruktion des Vierseits zu dem Mittelpunkte der gegebenen Strecke EF.

13. Wenn zur Konstruktion eines vollständigen Vierecks zwei Gegenseiten e und f und der Schnittpunkt ab eines andern Paares von Gegenseiten gegeben sind, ohne daſs jedoch die Strahlen a und b selbst vorgeschrieben wären, so kann man unzählig viele vollständige Vierecke zeichnen, die die genannten Gebilde gemein haben. In allen diesen Vierecken liegt der Schnittpunkt des dritten Paares von Gegenseiten auf einem und demselben Strahle, nämlich auf dem vierten harmonischen zu e, f und q (Fig. 197). Man erhält daher den Satz:

Die Gesamtheit der Punkte, die von einem gegebenen durch zwei gegebene Gerade harmonisch getrennt werden, ist identisch mit der Gesamtheit der Punkte einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden geht.

Liegt ab auf der Halbierungslinie eines der durch e und f bestimmten Winkel und ist eine dritte Seite c des Vierecks gegeben, so führt die Konstruktion zu einem Punkte von c, der auf der Halbierungslinie eines noch nicht halbierten Winkels der gegebenen Geraden liegt.

Wenn aufser den Gegenseiten e und f der Punkt cd auf der Halbierungslinie des einen Winkels der Geraden e und f gegeben ist, so führt die Konstruktion des Vierecks zu einem Punkte auf der Halbierungslinie eines Nebenwinkels jenes Winkels.

Übungen zu § 50.

1. Jede Transversale eines Dreiecks bestimmt mit den Seiten ein vollständiges Vierseit, in welchem die Verbindungslinien der Gegenecken durch die Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte des Dreiecks halbiert werden.

2. Die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits und des vollständigen Vierecks sollen mit Hilfe der Sätze über die Transversalen eines Dreiecks bewiesen werden.

3. Die Mittelpunkte der Strecken, welche je zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits verbinden, liegen in einer und derselben Geraden.

4. Zu drei gegebenen Gebilden das vierte harmonische mit alleiniger Hilfe des Lineales zu zeichnen.

5. Eine Strecke, zu der eine Parallele gegeben ist, mit alleiniger Hilfe des Lineales zu halbieren.

6. Zu einer halbierten Strecke durch einen Punkt aufserhalb die Parallele mit alleiniger Hilfe des Lineales zu ziehen.

7. Den Nebenwinkel eines halbierten Winkels mit alleiniger Hilfe des Lineales zu halbieren.

8. Einen gegebenen Winkel mit alleiniger Hilfe des Lineales zu verdoppeln, wenn zu einem seiner Schenkel das Lot im Scheitel gegeben ist.

9. Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade zu ziehen, welche durch die beiden andern Punkte von einer gegebenen Geraden harmonisch getrennt wird.

10. Auf einer von drei gegebenen Geraden einen Punkt zu konstruieren, der durch die beiden andern Geraden von einem gegebenen Punkte harmonisch getrennt wird.

11. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche durch den unzugänglichen Schnittpunkt von zwei gegebenen Geraden geht.

12. Den Schnittpunkt einer gegebenen Geraden mit der Verbindungslinie von zwei gegebenen Punkten zu bestimmen, ohne die Verbindungslinie dieser Punkte zu ziehen.

13. Wenn in der Ebene ein Parallelogramm gegeben ist, soll mit alleiniger Hilfe des Lineales 1) zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt die Parallele gezogen werden, 2) eine gegebene Strecke halbiert werden, 3) eine gegebene Strecke verdoppelt oder verdreifacht werden.

14. Die Fufspunkte der Halbierungslinien von zwei Innenwinkeln eines Dreiecks und der Fufspunkt der Halbierungslinie des Aufsenwinkels an der dritten Ecke liegen in einer Geraden.

15. Die Fufspunkte der Halbierungslinien der Aufsenwinkel eines Dreiecks liegen in einer Geraden.

16. Jede Höhe eines Dreiecks wird durch die Endpunkte der zugehörigen Seite von der Verbindungslinie der Fufspunkte der beiden andern Höhen harmonisch getrennt.

17. Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel des Dreiecks der Höhenfufspunkte.

18. Der Schnittpunkt der Schenkel eines Trapezoids, der Schnittpunkt der Diagonalen und die Mittelpunkte der Grundlinien liegen in einer Geraden.

19. Wird ein Punkt der Ebene mit zwei Ecken eines Dreiecks verbunden und auf jeder Verbindungslinie der Punkt bestimmt, welcher von jenem durch die zugehörige Ecke und deren Gegenseite harmonisch getrennt wird, so liegen die gefundenen Punkte mit der dritten Ecke des Dreiecks in einer Geraden.

20. Wie lautet der reziproke Satz von Nr. 19?

21. In jedem Dreieck sind harmonische Punkte: 1) die Endpunkte jeder Winkelhalbierenden und die auf ihr liegenden Mittelpunkte von Berührungskreisen, 2) auf jeder Seite der Fufspunkt der Höhe, der Fufspunkt einer Winkelhalbierenden und die Berührungspunkte des Inkreises und des zu der Seite gehörigen Ankreises oder die Berührungspunkte der nicht zu der Seite gehörigen Ankreise, je nachdem jene Winkelhalbierende einen Innenwinkel oder einen Aufsenwinkel des Dreiecks halbiert.

22. In jedem Dreieck ist:

1) $(b-a)^2 = (b_3 \pm a_3)(\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3)$

2) $(b+a)^2 = (b_3 \pm a_3)(\mathfrak{b}'_3 + \mathfrak{a}'_3)$

3) $h_3(\varrho_3 - \varrho) = 2\varrho\varrho_3$

4) $h_3(\varrho_1 + \varrho_2) = 2\varrho_1\varrho_2$.

23. Wenn zwei Strecken so auf einer Geraden liegen, dafs das Quadrat über der Hälfte der einen gleich dem Rechteck aus den Abständen ihres Mittelpunktes von den Endpunkten der andern ist, so bilden die Endpunkte der Strecken eine harmonische Punktreihe.

24. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

1) $a+b$, h_3, ϱ_1 2) $a-b$, h_3, ϱ_3 3) $a-b$, h_3, ϱ 4) $a+b-c$, h_3, ϱ_3 5) c, h_3, ϱ_1 6) c, h_3, ϱ 7) c, h_3, ϱ_3 8) w_3, ϱ, ϱ_3 9) w'_3, ϱ, ϱ_3 10) w_3, ϱ_1, ϱ_2 11) w'_3, ϱ_1, ϱ_2 12) w_3, h_3, $b-a$ 13) w'_3, h_3, $a+b$ 14) $b-a$, $b_3 - \mathfrak{b}_3$, ϱ 15) $b+a$, $a_3 + \mathfrak{a}'_3$, ϱ_1 16) $b-a$, $\mathfrak{a}_3 - a_3$, ϱ_3.

Achtzehntes Kapitel.

Harmonische Eigenschaften des Kreises und Kreisverwandtschaft.

§ 51. Pol und Polare.

1. $(ABCD)$ seien harmonische Punkte, P der Mittelpunkt von AB (Fig. 198).

Aus $\frac{CA}{DA} = \frac{CB}{DB}$ folgt der Reihe nach:

$$\frac{PA+PC}{PD+PA} = \frac{PA-PC}{PD-PA} = \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PA}, \quad \overline{PA}^2 = PC \cdot PD.$$

Da aus der letzten Gleichung auch umgekehrt die erste

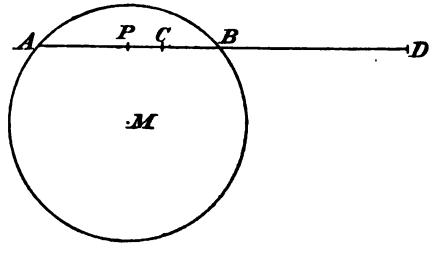


Fig. 198.

abgeleitet werden kann, so werden durch die Gleichung

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 = PC \cdot PD$$

die Punkte $(ABCD)$ als harmonische gekennzeichnet.

Wird durch A und B ein beliebiger Kreis gelegt, so ergiebt sich: Werden zwei Punkte durch einen Kreis harmonisch getrennt, so ist das Rechteck aus ihren Abständen von dem Mittelpunkte der zugehörigen Sehne gleich dem Quadrat über der Hälfte dieser Sehne.

Man ziehe nun durch einen Punkt P innerhalb des Kreises M den Durchmesser AB und die Sehne $A'B'$ und

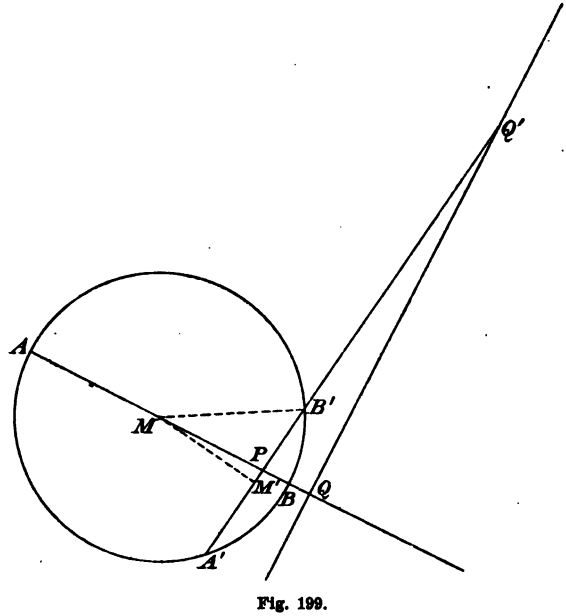


Fig. 199.

bestimme auf dem Durchmesser und auf der Sehne die Punkte Q und Q', die von P durch den Kreis harmonisch getrennt werden (Fig. 199). Ist M' der Mittelpunkt von $A'B'$, so ergiebt sich:

$$\overline{M'B'}^2 = M'P \cdot M'Q' = M'P \cdot (M'P + PQ')$$
$$= \overline{M'P}^2 + M'P \cdot PQ'.$$

In derselben Weise erhält man:

$$\overline{MB}^2 = \overline{MP}^2 + MP \cdot PQ.$$

Folglich ist:

$$\overline{MB}^2 - \overline{M'B'}^2 = r^2 - \overline{M'B'}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2 + MP \cdot PQ - M'P \cdot PQ'.$$

Da nun die Dreiecke $MB'M'$ und MPM' die Kathete MM' gemein haben, so ist:

$$r^2 - \overline{M'B'}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2,$$

also auch:

$$PM \cdot PQ = PM' \cdot PQ'.$$

Die Punkte M, M', Q und Q' liegen daher auf einem Kreise. Da aber

$$\sphericalangle MM'Q' = 90^0$$

ist, so ist auch:

$$\sphericalangle MQQ' = 90^0.$$

Dreht sich nun die Sehne $A'B'$ um den Punkt P, so bewegt sich der von P durch den Kreis harmonisch getrennte Punkt Q' auf dem in Q auf MP errichteten Lote. Somit ergiebt sich:

Der Ort für alle Punkte, die von einem gegebenen Punkte durch einen gegebenen Kreis harmonisch getrennt werden, ist eine Gerade, die auf dem Durchmesser durch den gegebenen Punkt senkrecht steht.

Dieser Ort heifst die Polare des Punktes P; P heifst der Pol seiner Polare.

Wird P aufserhalb des Kreises M angenommen, so ist der Ort für alle Punkte, die von P durch den Kreis harmonisch getrennt werden, eine Sehne des Kreises; doch wird auch in diesem Falle die durch die Sehne bestimmte Gerade die Polare von P genannt.

Je nachdem ein Punkt aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt, wird dieser durch die Polare des Punktes in zwei Punkten oder in keinem Punkte geschnitten.

Bewegt sich P in der Richtung nach B hin, bis er mit B zusammenfällt, so fällt auch der vierte harmonische Punkt zu A, B, P mit P zusammen, und die Polare von P geht in die Tangente über, die den Kreis in P berührt. Der Pol einer Tangente ist somit ihr Berührungspunkt, und jeder Punkt der Kreislinie hat die zugehörige Tangente als Polare.

Das Produkt aus den Mittelpunktsabständen eines Punktes und seiner Polare ist gleich dem Quadrat des Radius.

Alle Punkte, die vom Mittelpunkte des Kreises durch diesen harmonisch getrennt sind, liegen im Unendlichen. Damit für den Mittelpunkt des Kreises keine Ausnahme gemacht werden muſs, nehmen wir in der Ebene eine einzige

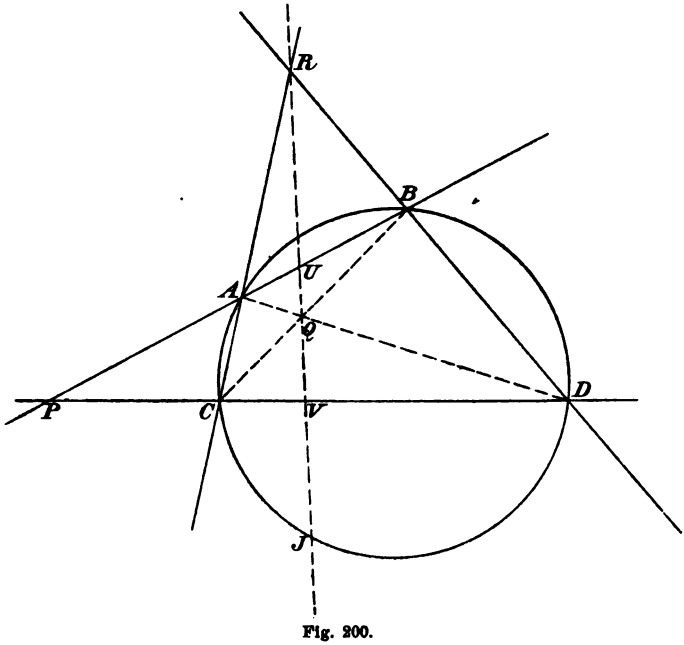


Fig. 200.

unendlich ferne Gerade an. Sie ist die Polare des Kreismittelpunktes nnd dieser ihr Pol.

2. Werden durch den Punkt P zwei Sekanten AB und CD gelegt, so bestimmen ihre Schnittpunkte mit dem Kreise ein vollständiges Viereck (Fig. 200). Folglich werden die Punkte P und Q durch die Geraden AC und BD harmonisch getrennt. Die Strahlen RP, RQ, RA und RB sind also harmonische Strahlen und $(PUAB)$ sowie $(PVCD)$ harmonische Punkte. Somit ist UV die Polare von P. Die Polare eines Punktes ist demnach mit alleiniger Hilfe des Lineales konstruierbar.

Dreht sich die Sekante CD um den Punkt P aufserhalb des Kreises M, bis C mit dem Schnittpunkte J des Kreises und der Polare von P zusammenfällt, so fällt auch V mit J zusammen, somit auch der vierte harmonische zu P, V und C, nämlich der Punkt D. Die Sekante geht also in eine Tangente über. Die Polare eines Punktes aufserhalb des Kreises schneidet demnach diesen in den Berührungspunkten der durch den Punkt gehenden Tangenten, sie ist die zu dem Punkte gehörige Berührungsehne.

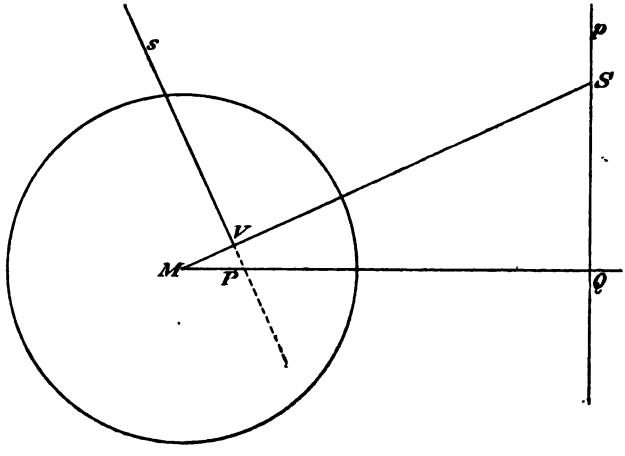


Fig. 201.

3. Sei p die Polare von P, S irgend ein Punkt auf p, s die Polare von S (Fig. 201). Es ist:

$$MP \cdot MQ = MS \cdot MV,$$

da jedes dieser Produkte gleich r^2 ist. Folglich sind P, Q, S und V die Ecken eines Sehnenvierecks. Der Winkel PQS ist aber ein Rechter, also auch der Winkel PVS, mithin fällt PV mit s zusammen. Jeder Punkt der Geraden p hat demnach eine Polare, die durch den Pol P von p geht.

Geht man umgekehrt von einer Geraden s aus, die durch den Pol P der Geraden p geht, und ist MV der zu s senkrechte Durchmesser, so ist $PQSV$ ein Kreisviereck, mithin:

$$MV \cdot MS = MP \cdot MQ.$$

Da das letztere Produkt gleich r^2 ist, so ist auch:

$$MV \cdot MS = r^2,$$

also S der Pol von s. Jede Gerade, die durch P geht, hat also ihren Pol auf der Polare von p. Beide Ergebnisse können auch in folgender Weise ausgesprochen werden:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol dieser Geraden. Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol die Polare dieses Punktes.

Wenn man zu zwei Punkten einer Geraden die Polaren zeichnet, so ist ihr Schnittpunkt der Pol der Geraden. Die Konstruktion des Poles einer Geraden kann somit auch mit alleiniger Hilfe des Lineales ausgeführt werden.

Dieser Satz kann unter Umständen dazu benutzt werden, um zu beweisen, daſs drei Punkte, deren Polaren bekannt sind, auf derselben Geraden liegen, oder daſs drei Gerade, deren Pole bekannt sind, durch denselben Punkt gehen.

4. Wenn der gegebene Kreis in einen Kreis von unendlich kleinem Radius übergeht, so berücksichtige man, daſs das Produkt der Mittelpunktsabstände von Pol und Polare gleich dem Quadrat des Radius, also gleich Null, sein muſs. Ist der Pol gegeben, so muſs daher der Mittelpunktsabstand der Polare, und, wenn die Polare gegeben ist, der Mittelpunktsabstand des Poles gleich Null sein. Es ergiebt sich daher: Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Punkt ist das in dem letztern Punkte auf der Verbindungslinie beider errichtete Lot, und der Pol einer Geraden in Bezug auf einen Punkt, der nicht auf ihr liegt, ist der Punkt selbst.

Ist P' der Schnittpunkt der Polare von P mit dem Durchmesser PM (Fig. 202), so ergiebt sich:

$$MP' \cdot MP = r^2,$$

mithin, wenn Q der Schnittpunkt des Kreises und der Geraden PM ist:

$$(r - QP')(r + QP) = r^2,$$

oder nach geeigneter Umformung:

$$\frac{1}{QP'} - \frac{1}{QP} = \frac{1}{r}.$$

Wird r unendlich groſs, so geht der Kreis in die Tangente in dem Punkte Q über, und $\frac{1}{r}$ wird gleich null; also $QP' = QP$. Die Polare eines Punkts bezüglich einer Geraden ist demnach der Rand eines Streifens, dessen Achse die gegebene Gerade ist, und dessen zweiter Rand durch den gegebenen Punkt geht. Der Pol einer Geraden g bezüglich einer Geraden m ist der Schnittpunkt der Polaren von irgend zwei Punkten,

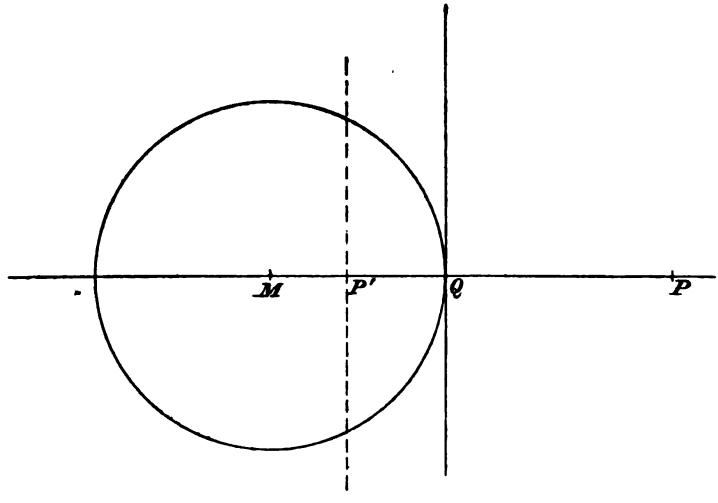


Fig. 202.

die auf g liegen. Da diese Polaren zu m parallel sind, so folgt: Der Pol einer Geraden in Bezug auf eine gegebene Gerade ist der unendlich ferne Punkt der letztern.

Übungen zu § 51.

1. Zu einem gegebenen Punkte die Polare und zu einer gegebenen Geraden den Pol mit alleiniger Hilfe des Lineales zu ziehen.

2. Von einem Punkte aus die Tangenten an einen gegebenen Kreis mit alleiniger Hilfe des Lineales zu ziehen, und in einem gegebenen Punkte eines Kreises die Tangente zu konstruieren.

3. Wenn in der Ebene ein Kreis gegeben ist, so soll man mit alleiniger Hilfe des Lineales konstruieren: 1) zu einer gegebenen Geraden das Lot durch einen gegebenen Punkt, 2) zu einer gegebenen Geraden die Parallele durch einen gegebenen Punkt, 3) zu einer gegebenen Strecke die Mittelsenkrechte, 4) von einem gegebenen Winkel die Halbierungslinie, 5) einen Winkel, der doppelt so groſs wie ein gegebener Winkel ist und mit diesem den Scheitel und einen Schenkel gemein hat.

4. Die Pole von harmonischen Strahlen sind harmonische Punkte, und die Polaren von harmonischen Punkten sind harmonische Strahlen.

5. Vier Punkte eines Kreises bilden ein vollständiges Viereck, in welchem jeder Schnittpunkt zweier Gegenseiten der Pol der Verbindungslinie der Schnittpunkte der beiden andern Paare von Gegenseiten ist.

6. Zieht man in den Ecken eines Dreiecks die Tangenten an den Umkreis und bringt jede von ihnen mit derjenigen Tangente zum Durchschnitt, die den Umkreis im Mittelpunkte des zu der Gegenseite gehörigen Bogens berührt, so liegen die erhaltenen Schnittpunkte in einer Geraden.

7. Zieht man in den Ecken eines Dreiecks die Tangenten an den Umkreis und bringt jede von ihnen mit derjenigen Tangente zum Durchschnitt, die den Umkreis in seinem Schnittpunkte mit der zu der Ecke gehörigen Mittellinie (Höhe) berührt, so liegen die erhaltenen Schnittpunkte in einer Geraden.

8. Vier Tangenten eines Kreises bilden ein vollständiges Vierseit, in welchem jede Verbindungslinie von zwei Gegenecken die Polare des Schnittpunktes der Verbindungslinien der beiden andern Paare von Gegenecken ist.

9. Vier Punkte eines Kreises und die zugehörigen Tangenten bilden ein vollständiges Viereck und ein vollständiges Vierseit derart, daſs auf jeder Verbindungslinie von Gegenecken des Vierseits zwei Schnittpunkte von Gegenseiten des Vierecks liegen, und durch jeden Schnittpunkt von Gegenseiten des Vierecks zwei Verbindungslinien von Gegenecken des Vierseits gehen.

§ 52. Die direkte Kreisverwandtschaft.

1. Zwei Punkte, die die Endpunkte desselben Durchmessers eines Kreises harmonisch trennen, nennt man verwandte Punkte für den Kreis; dieser heifst die Basis der Verwandtschaft.

Jedem Punkte der Ebene ist im allgemeinen ein einziger Punkt verwandt; dem Mittelpunkte der Basis ist jeder Punkt im Unendlichen verwandt; alle Punkte im Unendlichen haben einen gemeinschaftlichen verwandten Punkt, den Mittelpunkt der Basis; jeder Punkt auf der Basis ist sich

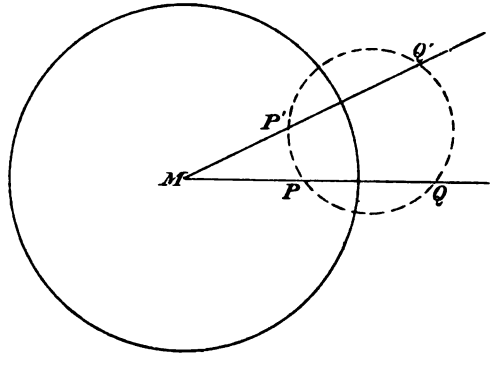


Fig. 203.

selbst verwandt. Von zwei verwandten Punkten liegt jeder auf der Polare des andern.

2. Sind P und Q verwandte Punkte (Fig. 203), so ist:

$$MP \cdot MQ = r^2.$$

Ist P', Q' ein zweites Paar verwandter Punkte, so ist auch:

$$MP' \cdot MQ' = r^2, \quad \text{mithin:} \quad MP' \cdot MQ' = MP \cdot MQ.$$

Somit liegen zwei Paare verwandter Punkte auf einem und demselben Kreise.

Legt man durch ein Paar verwandter Punkte P und Q einen beliebigen Kreis K, und schneidet dieser einen beliebigen Durchmesser der Basis in P' und Q', so ist:

$$MP \cdot MQ = MP' \cdot MQ'.$$

Da das erste Produkt gleich r^2 ist, so ist auch:

$$MP' \cdot MQ' = r^2.$$

Jeder Kreis, der durch ein Paar verwandter Punkte geht, schneidet somit jeden Durchmesser der Basis in einem Paare verwandter Punkte.

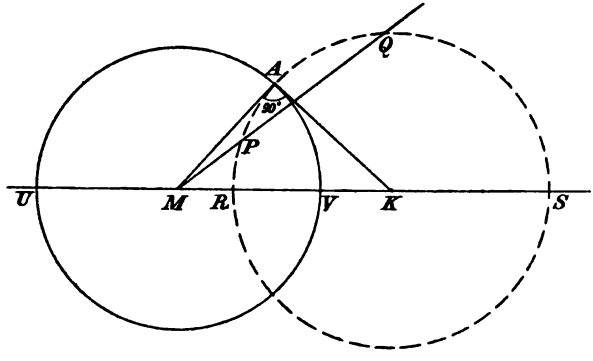


Fig. 204.

3. Sei A der Schnittpunkt der Basis mit einem Kreise K, der durch ein Paar verwandter Punkte P und Q geht (Fig. 204), so ist:

$$\overline{MA}^2 = MP \cdot MQ,$$

folglich ist MA eine Tangente des Kreises K.

Schneidet die Centrale den Kreis K in R und S, den Kreis M in U und V, so ist:

$$MR \cdot MS = r^2,$$

U, V, R, S sind also harmonische Punkte. Somit ist auch:

$$KU \cdot KV = \overline{KR}^2 = \overline{KA}^2,$$

folglich ist KA eine Tangente des Kreises M.

Da von den beiden Strecken MA und KA jede zugleich ein Radius des einen Kreises und eine Tangente des andern ist, so stehen MA und KA senkrecht aufeinander; die beiden Kreise schneiden sich also rechtwinkelig, jeder heißt ein Orthogonalkreis des andern. Jeder Kreis, der durch ein Paar verwandter Punkte eines

zweiten Kreises geht, schneidet also diesen rechtwinkelig.

Geht man von zwei Kreisen M und K aus, die sich rechtwinkelig schneiden, so stehen die Radien, die nach demselben Schnittpunkte A gehen, aufeinander senkrecht; MA ist also eine Tangente von K, und KA eine Tangente von M. Für irgend einen Durchmesser des Kreises M, der K in P und Q schneidet, gilt also die Beziehung: $MP \cdot MQ = r^2$; somit sind P und Q verwandte Punkte des Kreises M. Jeder Orthogonalkreis

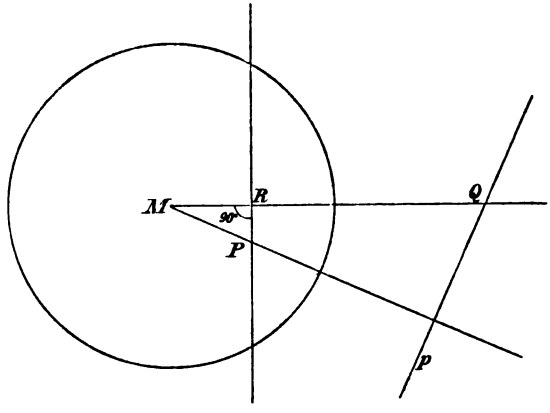


Fig. 205.

eines Kreises schneidet also jeden Durchmesser dieses Kreises in verwandten Punkten.

4. Wenn ein Punkt einen Durchmesser der Basis durchläuft, so beschreibt sein verwandter Punkt denselben Durchmesser.

Sei p eine beliebige Gerade, P ihr Pol, Q ein Punkt von p (Fig. 205). Der mit Q verwandte Punkt R liegt auf dem Durchmesser MQ und auf der Polare von Q, er ist also der Fufspunkt des von P auf MQ gefällten Lotes. Beschreibt nun Q die Gerade p, so bleibt sein Verwandter Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch M und durch P gehen. Die Punkte der Geraden p sind also den Punkten des Kreises über dem Durchmesser MP beziehungsweise verwandt. Man sagt deshalb: Jeder Ge-

raden ist ein Kreis verwandt, der den Abstand des Poles der Geraden von dem Mittelpunkte der Basis zum Durchmesser hat; jedem Kreise, der durch den Mittelpunkt der Basis geht, ist eine Gerade verwandt.

Wenn die Gerade p die Basis schneidet, so kennt man ohne weiteres drei Punkte des ihr verwandten Kreises. Schneidet ein Kreis, der durch den Mittelpunkt der Basis geht, die Basis, so ist seine verwandte Gerade die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise.

Daſs zwei Gerade nur einen Schnittpunkt, ihre verwandten Kreise aber zwei Schnittpunkte haben, liegt daran,

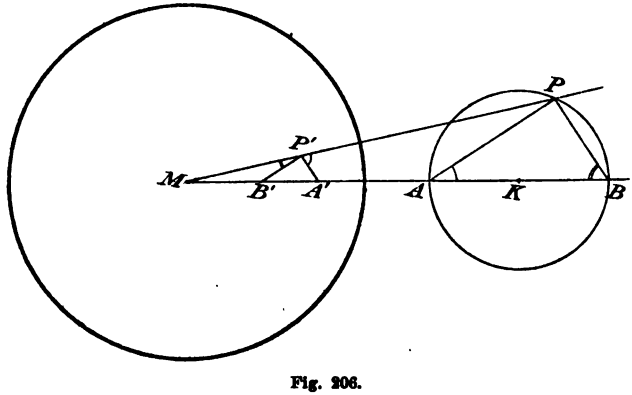


Fig. 206.

daſs den unendlich fernen Punkten beider Geraden derselbe Punkt, nämlich der Mittelpunkt der Basis, verwandt ist. Dem Schnittpunkte beider Geraden ist derjenige Schnittpunkt ihrer verwandten Kreise verwandt, der nicht mit dem Mittelpunkte der Basis zusammenfällt.

5. Sei M die Basis einer Verwandtschaft, K ein Kreis, der nicht durch M geht (Fig. 206). Die Punkte A und B, die von MK auf K ausgeschnitten werden, seien den Punkten A' und B' verwandt, der Punkt P des Kreises K dem Punkte P' des Durchmessers MP.

Da $MP \cdot MP' = MA \cdot MA'$ ist, so ist $AA'PP'$ ein Sehnenviereck, mithin

$$\sphericalangle PAB = A'P'P.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

$$\sphericalangle PBA = MP'B'.$$

Also folgt:

$$\sphericalangle PAB + PBA = A'P'P + MP'B'.$$

Die Supplementwinkel beider Summen sind also ebenfalls gleich, und da der eine, nämlich APB, ein Rechter ist, so ist es auch der andere, nämlich $A'P'B'$. Beschreibt nun P den Kreis K, so bleibt sein Verwandter P' Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch A' und B' gehen; somit beschreibt P' ebenfalls einen Kreis. **Jedem Kreise, der nicht durch den Mittelpunkt der Basis geht, ist also ein Kreis verwandt.**

Jeder Kreis, der durch ein Paar verwandter Punkte geht, wird von jedem Durchmesser der Basis in verwandten Punkten geschnitten; folglich ist jeder Orthogonalkreis der Basis sich selbst verwandt.

6. Wenn man von dem Mittelpunkte der Basis und den Punkten im Unendlichen absieht, so ist jedem Punkte der Ebene ein einziger Punkt verwandt; die Beziehung der Verwandtschaft ist eindeutig. Haben zwei Linien, die sich nicht ins Unendliche erstrecken und nicht durch den Mittelpunkt der Basis gehen, gemeinschaftliche Punkte, so haben ihre Verwandten eine gleiche Anzahl von Punkten gemein. Wenn zwei Linien sich ins Unendliche erstrecken, so haben ihre Verwandten mindestens einen Punkt gemein, nämlich den Mittelpunkt der Basis. Gehen zwei Linien durch den Mittelpunkt der Basis, so hat jede der beiden verwandten Linien einen Punkt im Unendlichen; berühren sich zwei Kreise im Mittelpunkte der Basis, so gehen ihre verwandten Geraden durch denselben Punkt im Unendlichen und sind daher parallel.

Es seien p und q zwei beliebige Gerade, K_p und K_q ihre verwandten Kreise bezüglich der Basis M (Fig. 207). Die Kreise K_p und K_q schneiden sich in M, ihre Tangenten in M stehen auf MK_p und auf MK_q beziehungsweise senkrecht und sind daher zu den Geraden p und q beziehungsweise parallel. Mithin schneiden sich beide Kreise unter demselben Winkel wie die mit ihnen verwandten Geraden.

Sind K_1 und K_2 zwei beliebige Kreise, die sich in A und B schneiden (Fig. 208), so gehen die verwandten Kreise K_1'

und K_2' durch die Punkte A' und B', welche mit A und B beziehungsweise verwandt sind. Zieht man durch A die beiden Tangenten t_1 und t_2 an die Kreise K_1 und K_2, so sind ihnen zwei Kreise T_1' und T_2' beziehungsweise verwandt, die in A' die Kreise K_1' und K_2' beziehungsweise berühren. Die Kreise T_1' und T_2' schneiden sich daher unter demselben Winkel wie die Kreise K_1' und K_2'. Dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel der Tangenten t_1 und t_2, mithin

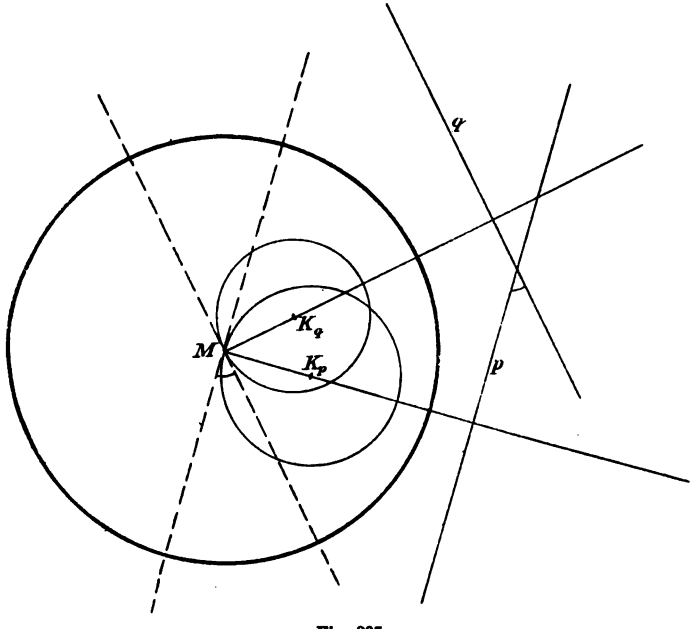


Fig. 207.

auch gleich dem Winkel, unter dem die Kreise K_1 und K_2 sich schneiden. Somit ergiebt sich: Zwei Linien schneiden sich in jedem Schnittpunkte unter demselben Winkel, wie ihre Verwandten in dem verwandten Punkte; gehen zwei Linien weder durch den Mittelpunkt der Basis noch durch einen unendlich fernen Punkt, so ist die Anzahl ihrer Schnittpunkte gleich der Anzahl der Schnittpunkte ihrer Verwandten.

7. Es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise die Kreisverwandtschaft zur Lösung von Aufgaben verwertet werden kann.

In Kapitel XIII wurde die Apollonische Berührungsaufgabe auf fünf Fälle zurückgeführt, die unter dem einheitlichen Gesichtspunkte betrachtet werden können, dafs sich

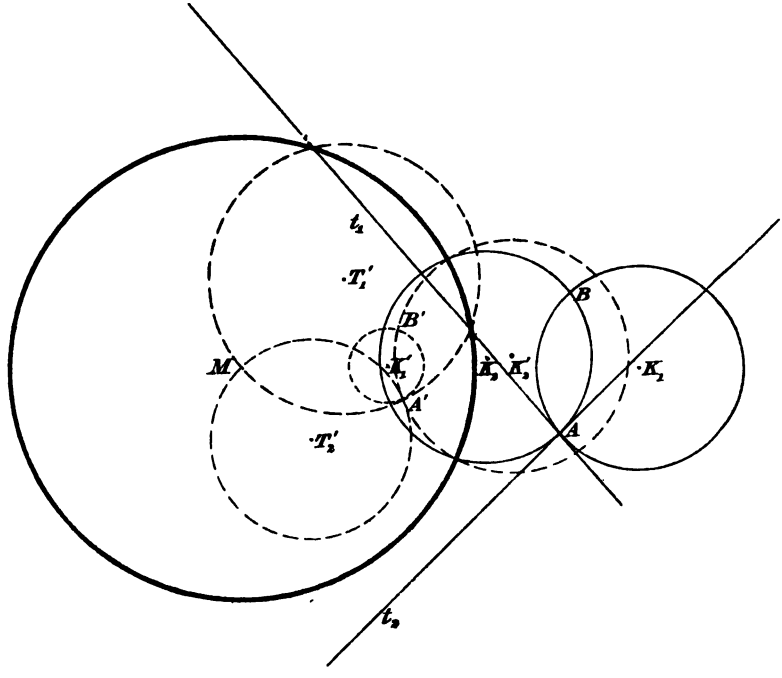


Fig. 208.

unter den gegebenen Gebilden mindestens ein Punkt P befindet. Sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Wählt man P als Mittelpunkt der Basis einer Kreisverwandtschaft, so ist dem gesuchten Kreise eine Gerade verwandt. Je nachdem nun der gesuchte Kreis durch einen zweiten gegebenen Punkt Q gehen oder eine Gerade g berühren oder einen Kreis K berühren soll, mufs seine verwandte Gerade durch den mit Q verwandten Punkt gehen

oder den mit g verwandten oder den mit K verwandten Kreis berühren. Diese verwandten Gebilde sind aber

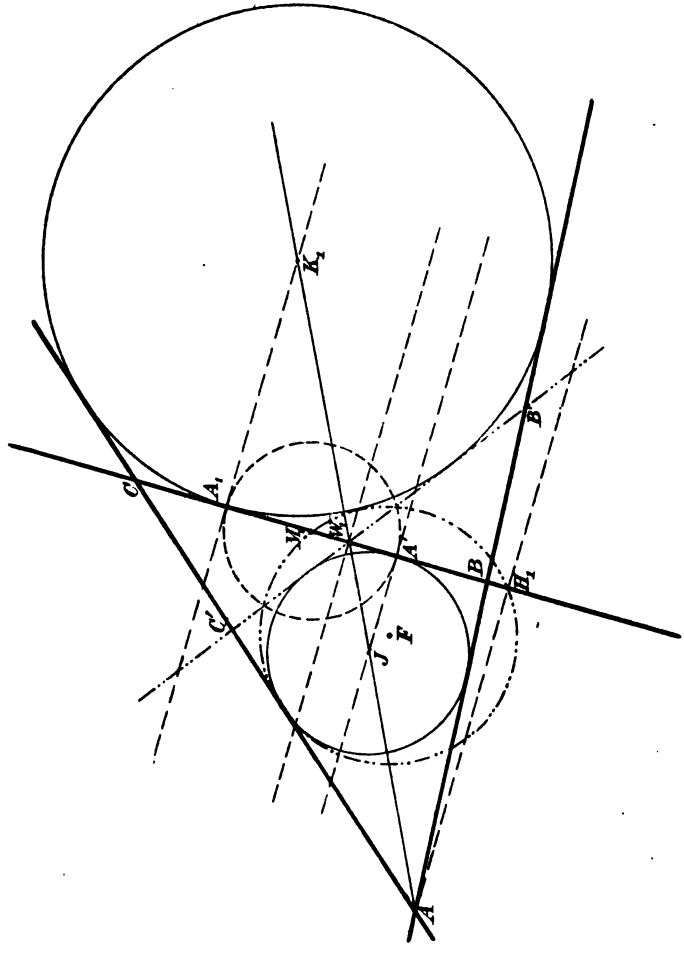


Fig. 209.

konstruierbar, mithin auch die mit M verwandte Gerade, schliefslich auch der Kreis M selbst.

8. Auch zum Beweise von Lehrsätzen kann die Kreisverwandtschaft benutzt werden.

In jedem Dreieck ABC (Fig. 209) ist bei Anwendung der üblichen Bezeichnungen:

$$BA' = CA_1 = s - b, \quad \text{also auch} \quad M_1A' = M_1A_1.$$

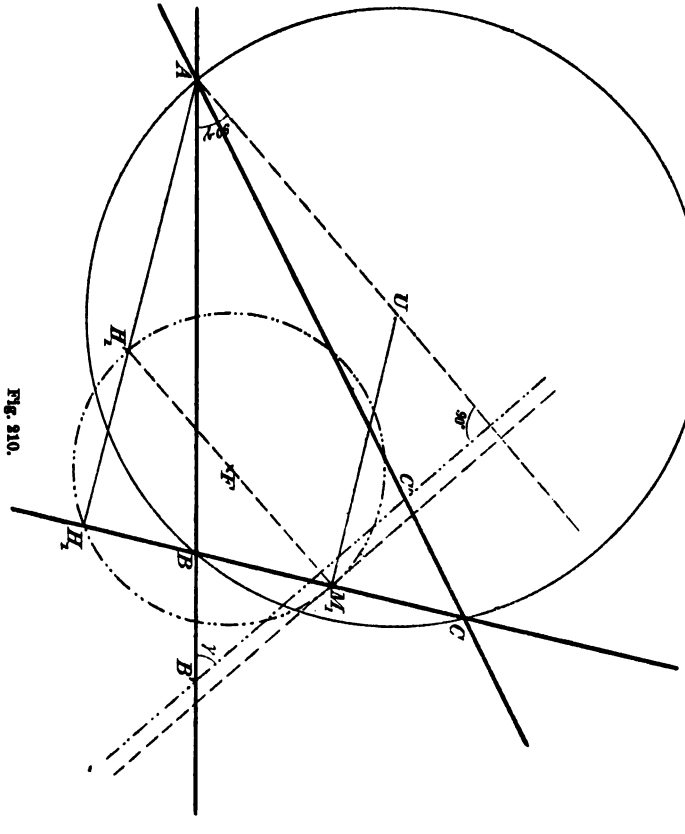


Fig. 210.

Ferner sind K_1, J, W_1, A, also auch A_1, A', W_1, H_1 harmonische Punkte (§ 50, 5 u. 9), mithin:

$$\overline{M_1A_1}^2 = \overline{M_1A'}^2 = M_1W_1 \cdot M_1H_1.$$

Beschreibt man nun um M_1 den Kreis mit dem Radius M_1A_1, so sind für diesen Kreis als Basis W_1 und H_1 verwandte Punkte. Da die Kreise J und K_1 Orthogonalkreise des

Kreises M_1 sind, so ist jeder derselben sich selbst verwandt. Zieht man nun die zweite gemeinschaftliche innere Tangente $B'C'$ von J und K_1, so bildet diese mit dem Dreieck und den Kreisen J und K_1 eine symmetrische Figur, deren Achse JK_1 ist; folglich schneiden sich BC und $B'C'$ auf der Achse, also in W_1. Der Geraden $B'C'$ ist ein Kreis verwandt, der durch M_1 und den mit W_1 verwandten Punkt H_1 geht, also ein Kreis, der mit dem Feuerbachschen Kreise zwei Punkte, M_1 und H_1, gemein hat. Die Identität beider Kreise wird bewiesen sein, wenn man zeigen kann, dafs sie in dem einen ihrer Schnittpunkte eine gemeinschaftliche Tangente besitzen.

Da die Gerade BC sich selbst verwandt ist, so schneidet sie $B'C'$ und den mit $B'C'$ verwandten Kreis unter gleichen Winkeln; dieser Kreis hat also in M_1 eine Tangente, die zu $B'C'$ parallel ist.

In dem durch die Geraden UA, $B'C'$ und AB bestimmten Dreieck (Fig. 210) ist nun:

$$\sphericalangle UAB' = 90 - \gamma \text{ und } \sphericalangle C'B'A = \gamma,$$

folglich steht $B'C'$ auf UA senkrecht. Andererseits steht die Tangente des Feuerbachschen Kreises im Punkte M_1 auf dem Durchmesser M_1H_1' des Feuerbachschen Kreises senkrecht, also auch auf der Geraden UA, die zu M_1H_1' parallel ist (UM_1 ist gleich und parallel AH_1'). Somit ist die Tangente des Feuerbachschen Kreises im Punkte M_1 zu $B'C'$ parallel. Der Feuerbachsche Kreis ist daher mit der Geraden $B'C'$ verwandt. Da nun $B'C'$ die Kreise J und K_1 berührt und jeder dieser Kreise mit sich selbst verwandt ist, so werden sie auch von dem Feuerbachschen Kreise berührt. Die Berührungskreise eines Dreiecks berühren also dessen Feuerbachschen Kreis.

Übungen zu § 52.

1. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet und einer der folgenden Bedingungen genügt: 1) durch einen zweiten gegebenen Punkt geht, 2) einen gegebenen Radius hat, 3) eine gegebene Gerade zum Durchmesser hat, 4) eine gegebene Gerade berührt, 5) einen gegebenen Kreis berührt,

6) auf einer gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge bestimmt.

2. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der zwei gegebene Kreise rechtwinkelig schneidet.

3. Welche Beziehung mufs zwischen zwei Geraden bestehen, damit jeder ihrer verwandten Kreise bezüglich des andern sich selbst verwandt ist?

4. Welche Geraden berühren ihre verwandten Kreise?

5. Welche Lage haben zwei Gerade, deren Verwandte gleich sind?

6. Welche Lage haben zwei Gerade, wenn die Inhalte oder die Umfänge ihrer Verwandten sich wie $p:q$ verhalten?

7. Welchen Weg beschreibt ein Punkt, dessen Verwandter die Seiten eines Vielecks durchläuft? Welche Winkelbeziehungen gelten für das Vieleck und seine verwandte Figur?

8. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und einer der folgenden Doppelbedingungen genügt: 1) zwei gegebene Gerade berührt, 2) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt, 3) zwei gegebene Kreise berührt, 4) eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel und einen gegebenen Kreis unter einem andern gegebenen Winkel schneidet.

9. Einen Kreis durch zwei gegebene Punkte zu legen, der eine gegebene Gerade oder einen gegebenen Kreis berührt oder eine gegebene Gerade oder einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet.

10. Für alle Punkte der Basis sind die Verhältnisse der Abstände von zwei gegebenen verwandten Punkten einander gleich.

11. Das Verhältnis aus dem Quadrat des Abstandes zweier Punkte und dem Rechteck aus ihren Abständen von dem Mittelpunkte der Basis ist gleich dem entsprechenden Verhältnis für ihre verwandten Punkte.

12. Der Abstand zweier Punkte verhält sich zu dem Abstande ihrer Verwandten wie das Rechteck aus den Mittelpunktsabständen jener Punkte zum Quadrat über dem Radius der Basis.

13. Konstruiert man zu drei Punkten A, B und C, die auf einer Geraden liegen, die verwandten Punkte A', B' und C' bezüglich der Basis M, so kann mit Hilfe des

vorigen Satzes gezeigt werden, dafs die Beziehung $AC = AB + BC$ für die Punkte M, A', B', C' den Ptolemäischen Lehrsatz ausspricht. (Man multipliziere die Gleichung mit $\frac{r^4}{MA \cdot MB \cdot MC}$.)

14. Welcher Beziehung müssen die Punkte einer Geraden genügen, damit ihre Verwandten ein gleichseitiges Dreieck bestimmen?

15. Welcher Beziehung müssen vier Punkte einer Geraden genügen, damit ihre Verwandten die Ecken eines Quadrats sind?

16. Alle Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneiden, berühren einen und denselben Kreis. (Man betrachte den gegebenen Punkt als Mittelpunkt der Basis einer Kreisverwandtschaft.)

17. Wenn zwei sich berührende Kreise sich so verschieben, dafs sie auch zwei feste Gerade berühren, so ist der Ort für den gemeinschaftlichen Punkt beider Kreise die Achse des durch die festen Geraden bestimmten Streifens oder Winkels. Welcher Satz kann hieraus mit Hilfe der Kreisverwandtschaft abgeleitet werden?

18. Wo schneiden sich die gemeinschaftlichen äufsern Tangenten von verwandten Kreisen?

19. Einen Kreis zu zeichnen, für den zwei gegebene Kreise oder ein gegebener Kreis und eine gegebene Gerade verwandt sind.

20. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, bezüglich dessen von zwei gegebenen Kreisen jeder sich selbst verwandt ist.

21. Für eine gegebene Basis zwei verwandte Punkte von gegebenem Abstande zu finden.

22. Um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, bezüglich dessen einem gegebenen Kreise ein Kreis von gegebenem Durchmesser verwandt ist.

23. Unter welcher Bedingung sind in Bezug auf eine gegebene Basis zwei gegebene Kreise zwei gleichen Kreisen beziehungsweise verwandt?

24. Unter welchen Bedingungen sind die Verwandten von zwei gegebenen Kreisen konzentrisch?

§ 53. Die inverse Kreisverwandtschaft.

1. Die Punkte auf einem Durchmesser des gegebenen Kreises M können auf zwei Arten so gepaart werden, daſs für die Punkte jedes Paares das Rechteck aus den Mittelpunktsabständen gleich dem Quadrat des Radius ist. Erfolgt die Zuordnung so, daſs die Punkte jedes Paares nicht durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises getrennt werden, so sollen die Punkte desselben Paares direkt verwandt heiſsen; werden die Punkte jedes Paares durch den Mittelpunkt getrennt, so nennen wir sie invers verwandt.

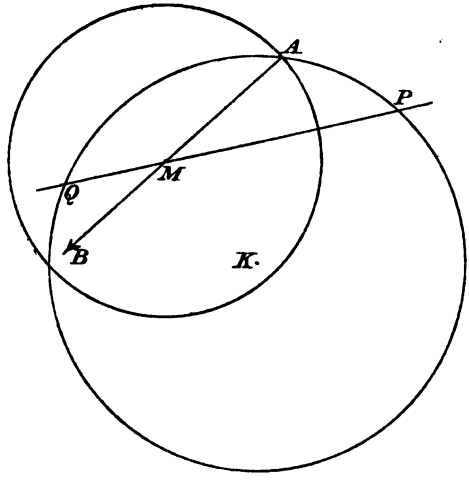


Fig. 211.

Die Zuordnung ist im allgemeinen eine eindeutige. Eine Ausnahme bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene, die in dem Mittelpunkte der Basis einen gemeinschaftlichen Verwandten besitzen, und der Mittelpunkt der Basis, der unzählig viele Verwandte besitzt, nämlich die unendlich fernen Punkte der Ebene. Jedem Punkte der Basis ist der andere Endpunkt seines Durchmessers verwandt.

2. Sei A ein Schnittpunkt der Basis M mit einem Kreise, der durch ein Paar invers verwandter Punkte P und Q geht (Fig. 211). Es ist dann:

$$\overline{MA}^2 = MP \cdot MQ,$$

folglich MA die Hälfte der kleinsten Sehne, die in dem Kreise K durch den Punkt M geht. Ist AB die kleinste Sehne selbst, so folgt:

$$\overline{MA}^2 = MA \cdot MB, \text{ mithin: } MB = MA = r.$$

Der Punkt B ist also der zweite Schnittpunkt der Kreise M und K, und es ergiebt sich: Jeder Kreis, der durch ein Paar invers verwandter Punkte eines zweiten Kreises geht, schneidet diesen unter einem Durchmesser.

Ein Kreis, der einen zweiten Kreis unter einem Durchmesser schneidet, soll ein Diametralkreis desselben heifsen.

Sei K ein Diametralkreis von M, so gilt für jeden Durchmesser von M, der K in P und Q schneidet, die Beziehung:

$$MP \cdot MQ = r^2.$$

Die Punkte P und Q sind demnach invers verwandt, und es folgt: Jeder Diametralkreis eines Kreises schneidet jeden Durchmesser desselben in einem Paare invers verwandter Punkte.

3. Die früher abgeleiteten Gesetze bleiben für die inverse Verwandtschaft bestehen. Wir beschränken uns daher darauf, die Ableitung jener Gesetze und die sinngemäfse Übertragung des angegebenen Übungstoffes auf die inverse Verwandtschaft als nützliche Übung zu empfehlen.

Neunzehntes Kapitel.

Die doppelte Verwandtschaft zweier Kreise.

§ 54. Ähnlichkeitspunkte, -strahlen und -achsen.

1. Wenn von zwei Kreisen M_1 und M_2 keiner den andern schneidet und keiner innerhalb des andern liegt, so haben sie zwei Paare gemeinschaftlicher Tangenten, zwei

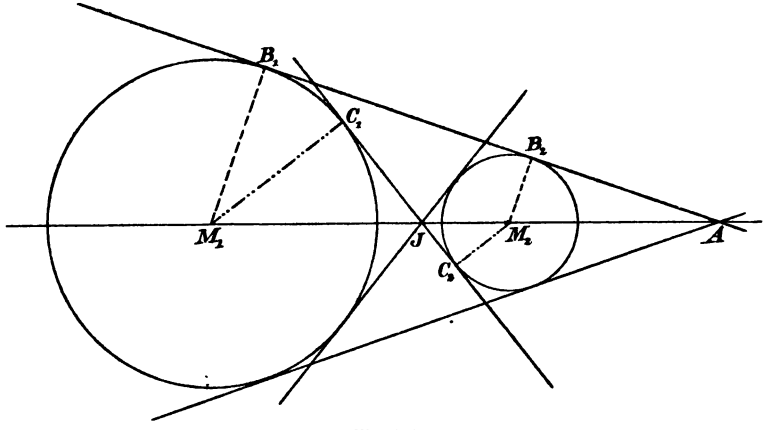


Fig. 212.

äußere und zwei innere (Fig. 212). Aus Gründen der Symmetrie liegt sowohl der Schnittpunkt A der äußern als auch der Schnittpunkt J der innern auf der Centrale beider Kreise.

Sind B_1 und B_2 die Berührungspunkte einer äufsern, C_1 und C_2 die einer innern Tangente, so ist:

$$M_1 B_1 A \sim M_2 B_2 A \quad \text{und} \quad M_1 C_1 J \sim M_2 C_2 J,$$

mithin:

$$\frac{M_1 A}{M_2 A} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \frac{M_1 J}{M_2 J} = \frac{r_1}{r_2},$$

also:

$$\frac{M_1 J}{M_2 J} = \frac{M_1 A}{M_2 A},$$

d. h. die Mittelpunkte zweier Kreise und die Schnittpunkte von je zwei gleichartigen gemeinschaftlichen Tangenten sind harmonische Punkte.

Liegen die Kreise M_1 und M_2 so, dafs sie weniger als vier gemeinschaftliche Tangenten oder gar keine haben, so giebt es nichtsdestoweniger zwei Punkte A und J, die die Mittelpunkte der gegebenen Kreise im Verhältnis der Radien harmonisch trennen. Jede Gerade, die die Endpunkte von gleichgerichteten Radien verbindet, geht durch A; und J wird auf der Centrale durch jede Gerade bestimmt, die die Endpunkte von entgegengesetzt gerichteten Radien verbindet. Man nennt A den äufsern, J den innern Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Wenn zwei Kreise sich berühren, so ist der Berührungspunkt ein Ähnlichkeitspunkt: der innere bei ausschliefsender Berührung, der äufsere bei einschliefsender.

Jede durch einen Ähnlichkeitspunkt gelegte Gerade heifst Ähnlichkeitstrahl. Zu den Ähnlichkeitstrahlen gehören auch die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise. Jeder andere Ähnlichkeitstrahl schneidet entweder keinen der beiden Kreise oder jeden von ihnen in zwei Punkten.

Unter den vier Schnittpunkten eines Ähnlichkeitstrahles mit den beiden Kreisen giebt es zwei Paare, die Endpunkte von parallelen Radien sind, und zwei Paare, die Endpunkte von antiparallelen Radien beider Kreise sind (Fig. 213). Die Endpunkte paralleler Radien heifsen entsprechend, die Endpunkte antiparalleler Radien nennt man nicht entsprechende Punkte der beiden Kreise für den auf ihrer Verbindungslinie liegenden Ähnlichkeitspunkt. Entsprechende

Punkte sind: $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, $E_1 E_2$; nicht entsprechende: $B_1 C_2$, $C_1 B_2$, $D_1 E_2$, $E_1 D_2$.

Die Centrale ist ein Ähnlichkeitstrahl für jeden der

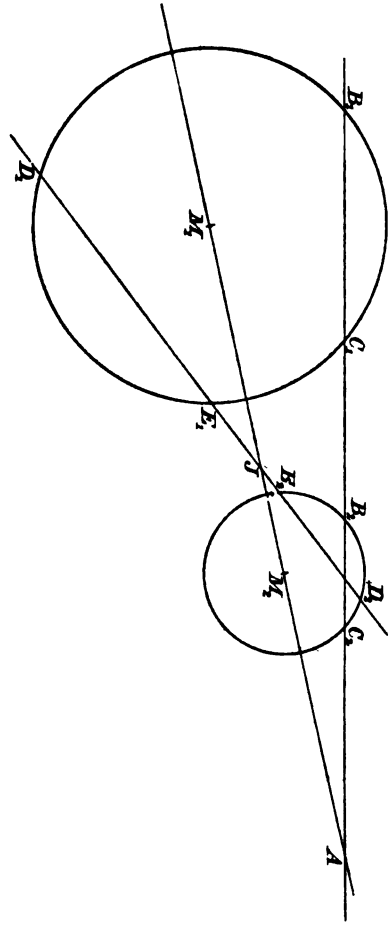


Fig. 318.

beiden Ähnlichkeitspunkte. Ihre Schnittpunkte mit den beiden Kreisen können daher auf zwei Arten gepaart werden: zwei entsprechende für den einen Ähnlichkeitspunkt sind nicht entsprechende für den andern.

2. Es seien $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, $E_1 E_2$ vier Paare entsprechender Punkte der Kreise M_1 und M_2 auf zwei äufsern Ähnlichkeitstrahlen (Fig. 214).

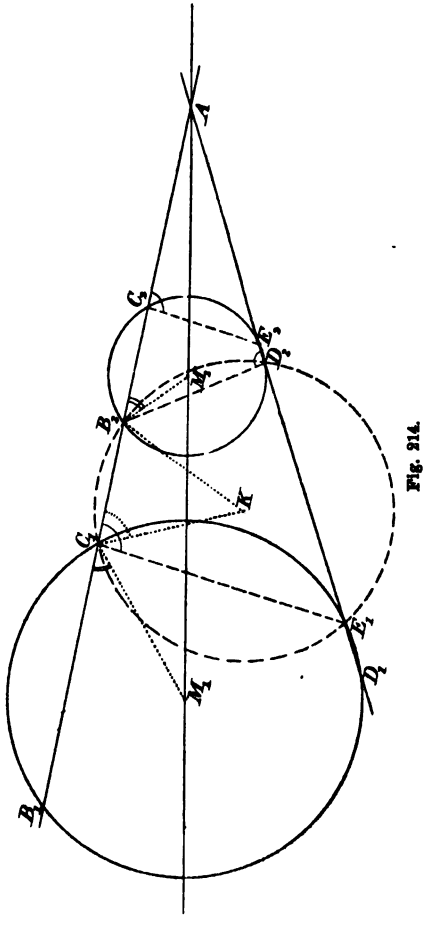


Fig. 214.

Da $\frac{A C_1}{A C_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{A E_1}{A E_2}$ ist ($A M_1 C_1 \sim A M_2 C_2$ u. s. w.), so folgt:

$A C_1 E_1 \sim A C_2 E_2$, mithin: $\sphericalangle A C_1 E_1 = A C_2 E_2$.

Letzterer Winkel ist aber in dem Sehnenviereck $B_2 C_2 E_2 D_2$ dem Innenwinkel an der Gegenecke D_2 gleich, folglich ist auch in dem Viereck $C_1 B_2 D_2 E_1$ ein Aufsenwinkel dem

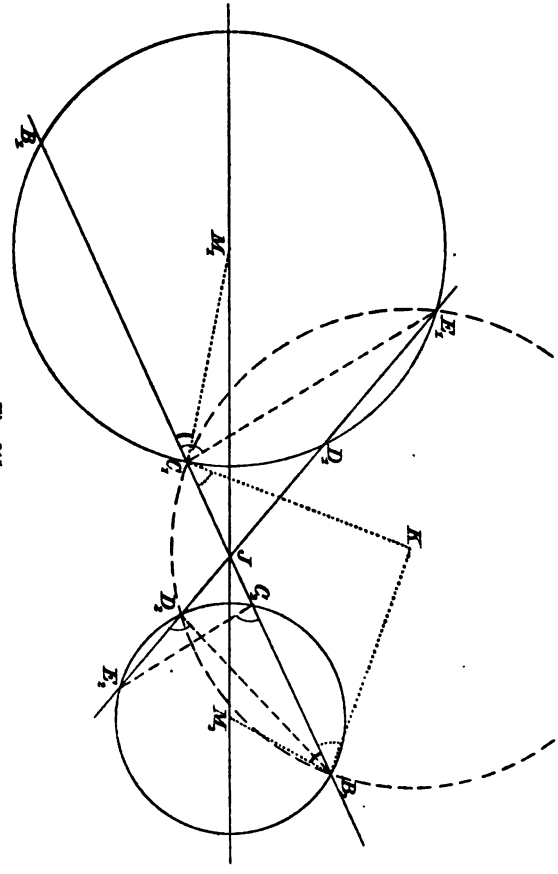


Fig. 214.

Innenwinkel an der Gegenecke gleich. Die Ecken des letztgenannten Vierecks liegen daher auf einem Kreise.

Liegen die betrachteten Punkte auf innern Ähnlichkeitstrahlen (Fig. 215), so ergiebt sich die Gleichheit der Winkel JC_1E_1 und JD_2B_2 in ähnlicher Weise wie vorhin. Da deren Schenkel durch die Punkte E_1 und B_2 gehen, so

liegen die vier Punkte C_1, E_1, B_2, D_2 wieder auf einem Kreise K. Im ersten Falle ist:

$$\sphericalangle M_1 C_1 B_1 = M_2 B_2 C_2 \text{ und } \sphericalangle K C_1 B_2 = K B_2 C_1,$$

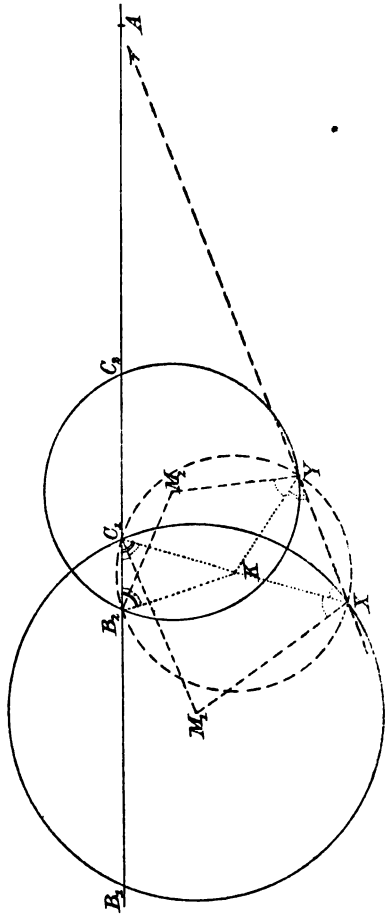


Fig. 216.

folglich: $\sphericalangle M_1 C_1 K = M_2 B_2 K.$

Der Kreis K schneidet daher M_1 und M_2 unter gleichen Winkeln.

Im zweiten Falle ergiebt sich, daſs $M_1 C_1 K$ und $M_2 B_2 K$ Supplementwinkel sind, daſs also K die Kreise M_1 und M_2 unter Supplementwinkeln schneidet.

Je zwei Paare nicht entsprechender Punkte für denselben Ähnlichkeitspunkt liegen daher auf einem Kreise, der die gegebenen unter gleichen Winkeln oder unter Supplementwinkeln schneidet, je nachdem die Punktpaare auf den äuſsern oder auf den innern Ähnlichkeitspunkt bezogen sind.

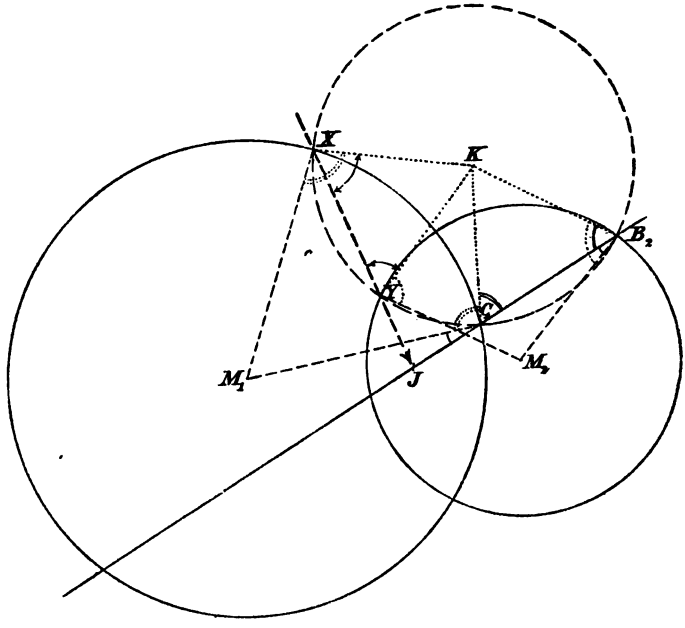


Fig. 217.

Der Satz bleibt bestehen für zwei Paare nicht entsprechender Punkte, die auf demselben Ähnlichkeitstrahle liegen, da ja dieser als Kreis von unendlich groſsem Radius aufgefaſst werden kann.

3. Es seien $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ entsprechende Punkte der Kreise M_1 und M_2 auf demselben Ähnlichkeitstrahle; K ein Kreis, der durch ein Paar nicht entsprechender Punkte C_1 und B_2 geht und die Kreise M_1 und M_2 auſserdem in X und Y schneidet (Fig. 216 u. 217).

Es ist dann:

$$\sphericalangle M_1 C_1 B_1 = M_2 B_2 C_2$$
$$\sphericalangle K C_1 B_2 = K B_2 C_1$$
$$\sphericalangle K X Y = K Y X$$
$$\sphericalangle M_1 X K = M_1 C_1 K$$
$$\sphericalangle M_2 Y K = M_2 B_2 K.$$

Wenn $B_1 C_2$ durch den äufsern Ähnlichkeitspunkt geht (Fig. 216), so folgt aus den beiden ersten Gleichungen:

$$\sphericalangle M_1 C_1 K = M_2 B_2 K,$$

folglich:

$$\sphericalangle M_1 X K = M_2 Y K \text{ und } \sphericalangle M_1 X Y = M_2 Y X.$$

Die Radien $X M_1$ und $Y M_2$ sind daher antiparallel, und die Gerade $X Y$ ist ein Ähnlichkeitstrahl.

Geht $B_1 C_2$ durch den innern Ähnlichkeitspunkt (Fig. 217), so erhält man:

$$\sphericalangle M_1 C_1 K + M_2 B_2 K = 2R,$$

mithin auch:

$$\sphericalangle M_1 X K + M_2 Y K = 2R \text{ und } \sphericalangle M_1 X Y + M_2 Y X = 2R.$$

Die Radien $X M_1$ und $Y M_2$ sind daher antiparallel und $X Y$ ist ein Ähnlichkeitstrahl. Es folgt daher der Satz: Jeder Kreis, der durch zwei nicht entsprechende Punkte zweier Kreise geht, schneidet diese in einem zweiten Paare nicht entsprechender Punkte für denselben Ähnlichkeitstrahl, mithin unter gleichen Winkeln oder unter Supplementwinkeln.

4. Die Geraden $M_1 C_1$ und $M_2 B_2$ bestimmen mit $C_1 B_2$ ein gleichschenkeliges Dreieck; der Schnittpunkt von $M_1 C_1$ und $M_2 B_2$ ist also Mittelpunkt eines Kreises, der M_1 und M_2 in den Punkten C_1 und B_2 berührt (Fig. 218 u. 219). Umgekehrt, wenn die Kreise M_1 und M_2 durch einen Kreis K in X und Y berührt werden, so sind die Radien $M_1 X$ und $M_2 Y$ antiparallel; mithin ist dann $X Y$ ein Ähnlichkeitstrahl. Durch jedes Paar nicht entsprechender Punkte zweier Kreise geht daher ein Kreis, der die gegebenen gleichartig oder ungleichartig berührt, je nachdem jene Punkte auf einem äufsern oder einem innern Ähnlichkeitstrahle liegen.

Die Tangenten in zwei nicht entsprechenden Punkten zweier Kreise sind auch Tangenten des zugehörigen Be-

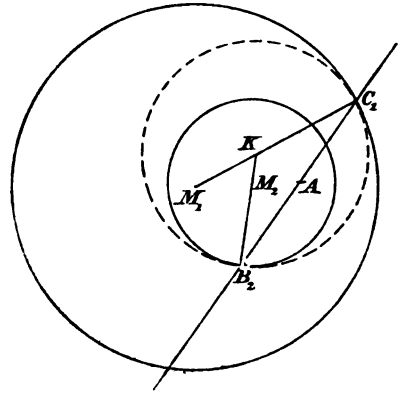


Fig. 218.

rührungskreises, also einander gleich. Ihr Schnittpunkt ist daher der Mittelpunkt eines Orthogonalkreises der gegebenen Kreise.

5. Da je zwei Paare nicht entsprechender Punkte für

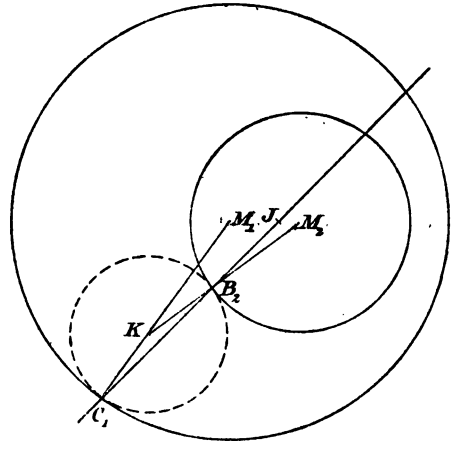


Fig 219.

denselben Ähnlichkeitspunkt auf einem Kreise liegen, so sind für alle solche Paare nicht entsprechender Punkte die Rechtecke aus den Abständen von dem zugehörigen Ähnlichkeitspunkte einander gleich.

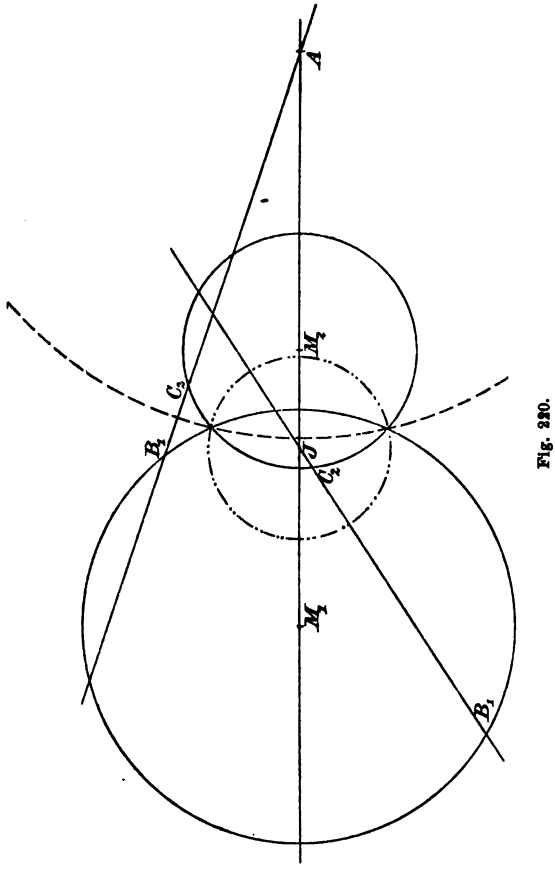
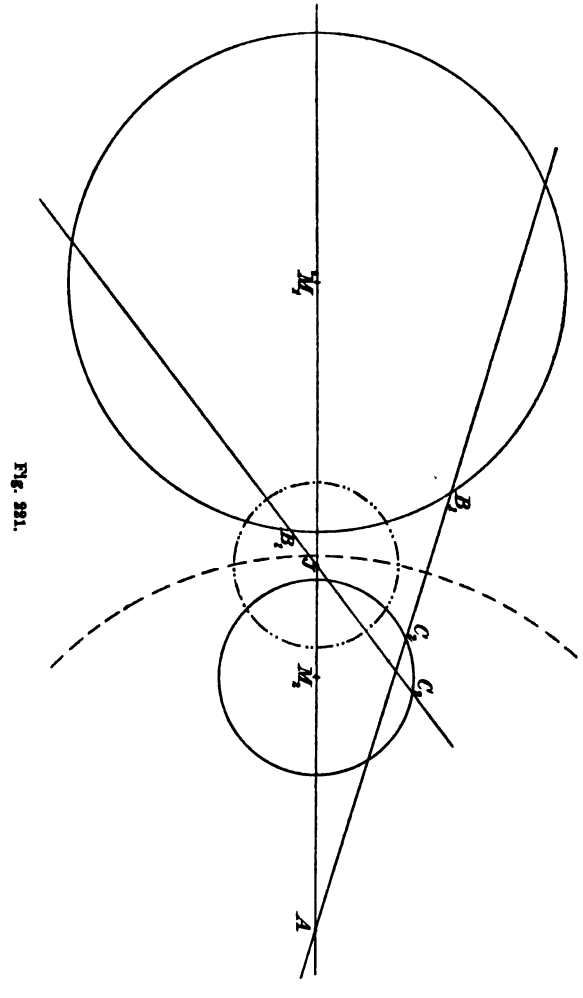


Fig. 220.

Sind B_1 und C_2 zwei nicht entsprechende Punkte für den äufsern Ähnlichkeitspunkt (Fig. 220 u. 221), so kann eine Strecke r_a konstruiert werden, die der Bedingung genügt:

$$r_a^2 = AB_1 \cdot AC_2.$$

Beschreibt man um A den Kreis mit dem Radius r_a, so sind sowohl B_1 und C_2 als auch je zwei andere nicht ent-



sprechende Punkte der Kreise M_1 und M_2 bezüglich des Kreises A direkt verwandt; die Kreise M_1 und M_2 sind also verwandte Kreise bezüglich der Basis A. Jeder Kreis,

der durch ein Paar nicht entsprechender Punkte von M_1 und M_2 geht, schneidet den Kreis A rechtwinkelig, und umgekehrt: jeder Orthogonalkreis von A, der die Kreise M_1 und M_2 schneidet, bestimmt auf ihnen zwei Paare nicht entsprechender Punkte und schneidet sie unter gleichen Winkeln.

Wenn die Kreise M_1 und M_2 sich schneiden, so geht der Kreis A durch ihre Schnittpunkte, von denen ja jeder ein Paar nicht entsprechender Punkte der Kreise M_1 und M_2, also ein sich selbst verwandter Punkt des Kreises A ist. Der Kreis A heifst die äufsere Basis der Kreise M_1 und M_2.

Wenn B_1 und C_2 zwei nicht entsprechende Punkte für den innern Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise sind und diese sich schneiden, so gelangt man zu einem Kreise um J, dessen Radius r_i durch die Bedingung $r_i^2 = JB_1 \cdot JC_2$ bestimmt wird. Die Kreise M_1 und M_2 sind bezüglich des Kreises J direkt verwandt, dieser heifst die innere Basis der gegebenen Kreise. Dem ersten Falle gegenüber besteht der einzige Unterschied darin, dafs die Orthogonalkreise der innern Basis die gegebenen Kreise unter Supplementwinkeln schneiden.

Haben die Kreise M_1 und M_2 keinen Punkt gemein, so werden je zwei nicht entsprechende Punkte durch J getrennt; je zwei solcher Punkte sind also für die Basis J invers verwandt. Jeder Kreis, der durch zwei nicht entsprechende Punkte für den innern Ähnlichkeitspunkt geht, schneidet daher die innere Basis unter dem Durchmesser. Umgekehrt bestimmt jeder Kreis, der J unter dem Durchmesser und auch M_1 und M_2 schneidet, auf den letztern Kreisen zwei Paare nicht entsprechender Punkte für den innern Ähnlichkeitspunkt.

Zwei Kreise können also auf zwei Arten als verwandt betrachtet werden; wenn sie sich schneiden, so sind beide Verwandtschaften direkt; schneiden sie sich nicht, so ist die eine Verwandtschaft invers.

6. Sei M der Kreis, der den Abstand der Ähnlichkeitspunkte der Kreise M_1 und M_2 zum Durchmesser hat (Fig. 222), P ein beliebiger Punkt auf diesem Kreise.

Die Strahlen, die von P aus die Punkte M_1, M_2, J, A projizieren, sind harmonische Strahlen. Da nun PJ und PA aufeinander senkrecht stehen, so ist M ein Apollonischer

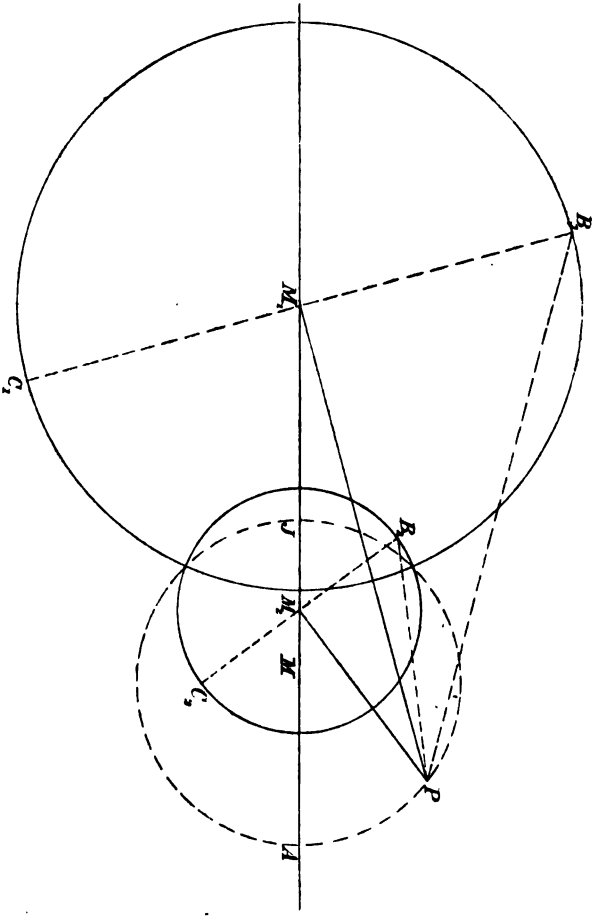


Fig. 222.

Kreis des Dreiecks $M_1 M_2 P$; der Kreis M also der Ort für alle Punkte, für die das Verhältnis der Abstände von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise gleich dem Verhältnis ihrer Radien ist.

Ist nun $B_1 C_1$ der zu PM_1, $B_2 C_2$ der zu PM_2 senkrechte Durchmesser, so ist:

$$PM_1B_1 \sim PM_2B_2,$$

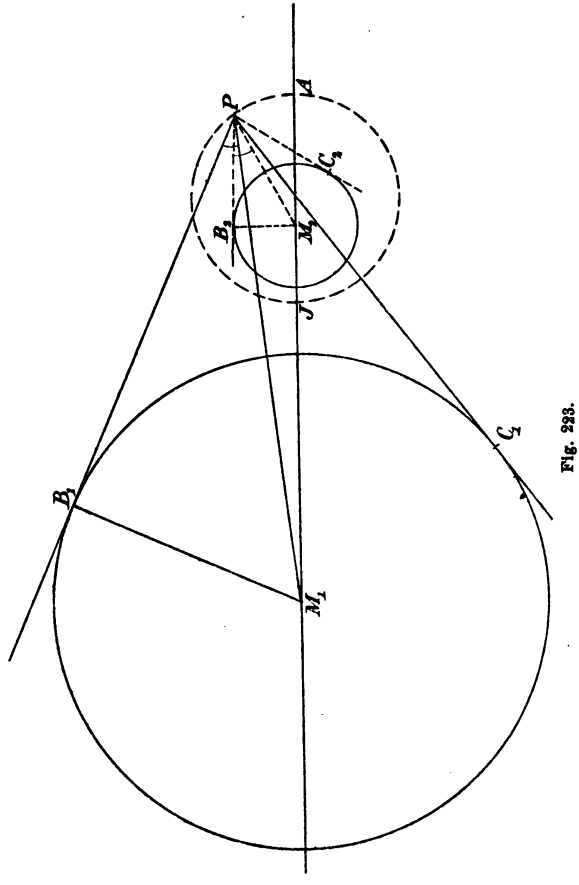


Fig. 223.

folglich: $\sphericalangle B_1PM_1 = B_2PM_2,$

also auch: $\sphericalangle B_1PC_1 = B_2PC_2.$

Ist umgekehrt P ein Punkt der Ebene, von dem aus die zu seinen Mittelpunktsabständen senkrechten Durchmesser

der Kreise M_1 und M_2 unter gleichen Winkeln gesehen werden, so ergiebt sich wieder die Ähnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke PM_1B_1 und PM_2B_2, also auch:

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Der Punkt P liegt somit auf dem Kreise, der AJ zum Durchmesser hat. Der Kreis, der den Abstand der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise zum Durchmesser hat, ist also der Ort für alle Punkte, von denen aus die zu ihren Mittelpunktsabständen senkrechten Durchmesser unter gleichen Winkeln gesehen werden.

7. Wenn die Kreise M_1 und M_2 sich nicht schneiden, so liegt jeder Punkt des vorigen Kreises M aufserhalb der Kreise M_1 und M_2 (Fig. 223). Zieht man von einem Punkte P von M aus die Tangenten PB_1 und PC_1 an M_1 und die Tangenten PB_2 und PC_2 an M_2, so ist wieder:

$$PB_1M_1 \sim PB_2M_2,$$

mithin:

$$\sphericalangle B_1PM_1 = B_2PM_2 \text{ und } \sphericalangle B_1PC_1 = B_2PC_2.$$

Umgekehrt kann auch wieder bewiesen werden, dafs jeder Punkt, von dem aus die Kreise M_1 und M_2 unter gleichen Winkeln gesehen werden, auf dem Kreise M liegt. Der Kreis, der den Abstand der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise zum Durchmesser hat, ist somit auch der Ort für alle Punkte, von denen aus beide Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden.

8. Jeder Ähnlichkeitstrahl der Kreise M_1 und M_2 wird von diesen unter gleichen Winkeln geschnitten. Werden zwei Ähnlichkeitstrahlen gezogen, die von den Kreisen beziehungsweise unter den Winkeln α und β geschnitten werden, und fällt man von den Mittelpunkten aus die Lote auf die Strahlen, so ist (Fig. 224):

$$M_1E_1Q_1 \sim M_2E_2Q_2 \text{ und } M_1C_1P_1 \sim M_2P_2C_2,$$

mithin:

$$\frac{M_1Q_1}{M_2Q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_1P_1}{M_2P_2} \text{ und } \frac{M_1P_1}{M_1Q_1} = \frac{M_2P_2}{M_2Q_2}.$$

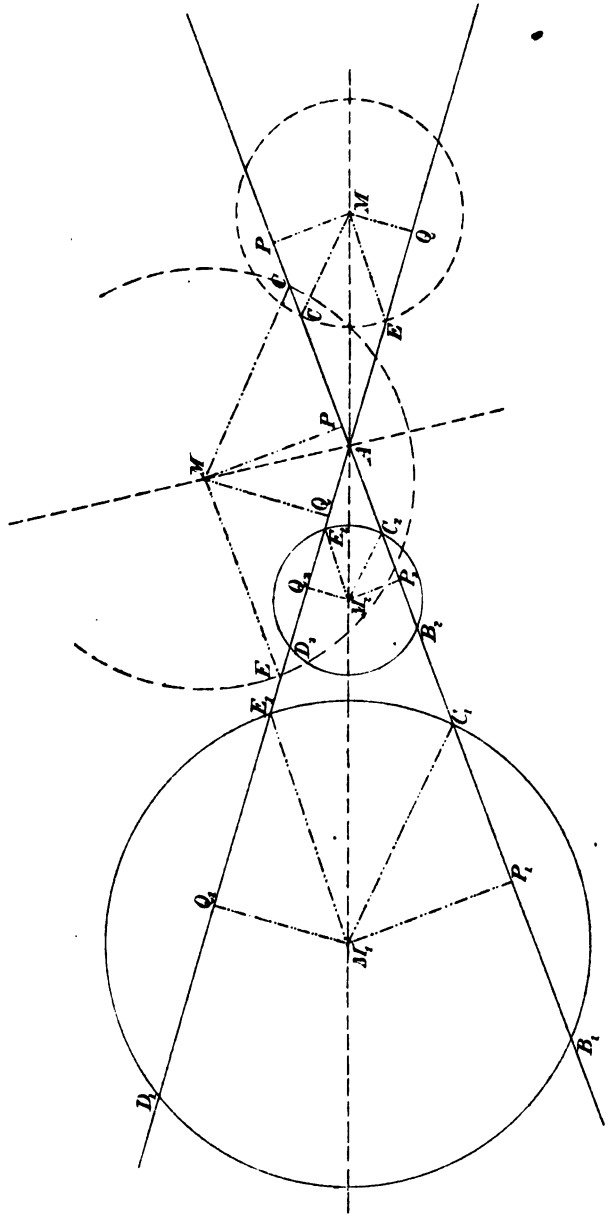


Fig. 224.

Die Verhältnisse der Abstände der Kreismittelpunkte von den beiden Ähnlichkeitstrahlen sind also gleich.

Ist nun M ein Punkt, für den das Verhältnis der Abstände von den gegebenen Geraden AB_1 und AD_1 gleich dem entsprechenden Verhältnis für den Punkt M_1 ist, so liegt entweder M auf der Geraden M_1M_2, oder die Strahlen AM_1 und AM werden durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt. Zieht man durch einen solchen Punkt M die Parallelen zu M_1C_1 und M_1E_1, sowie die Lote zu AB_1 und AD_1, so ist:

$$MPC \sim M_1P_1C_1 \quad \text{und} \quad MQE \sim M_1Q_1E_1,$$

mithin:

$$\frac{MP}{M_1P_1} = \frac{MC}{M_1C_1} \quad \text{und} \quad \frac{MQ}{M_1Q_1} = \frac{ME}{M_1E_1}.$$

Da aber nach Voraussetzung $\frac{MP}{MQ} = \frac{M_1P_1}{M_1Q_1}$ ist, so ergiebt sich weiter:

$$\frac{MC}{M_1C_1} = \frac{ME}{M_1E_1} \quad \text{und} \quad MC = ME.$$

Der Kreis um M mit dem Radius MC geht also durch E und schneidet die Geraden AB_1 und AD_1 beziehungsweise unter den Winkeln α und β. So ergiebt sich der Satz: Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Gerade unter je einem gegebenen Winkel schneiden, wird durch zwei Gerade gebildet, die die gegebenen harmonisch trennen.

Konstruiert man den Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Radius, die die eine Gerade unter dem Winkel α schneiden, und den Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von demselben Radius, die die andere Gerade unter dem Winkel β schneiden, so bestimmen beide Orte ein Parallelogramm, dessen Diagonalen den gesuchten Ort bilden.

9. Sind drei Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben, so werden die Ähnlichkeitspunkte von je zweien durch die Punkte A und J unter Anhängung von Zeigern bezeichnet, die die Nummern der zugehörigen Kreise angeben, nämlich: A_{12}, J_{12}, A_{13}, J_{13}, A_{23}, J_{23}.

Wenn man durch einen Ähnlichkeitspunkt einen beliebigen Strahl zieht, so ist das Verhältnis seiner Abstände

von den Kreismittelpunkten gleich dem Verhältnis der Radien. Umgekehrt, wenn für eine Gerade das Verhältnis der Mittelpunktsabstände gleich dem Verhältnis der Radien ist, so ist sie ein Ähnlichkeitstrahl.

Fällt man nun von den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 aus die Lote a_1, a_2, a_3 auf die Gerade $A_{12}A_{13}$ und die Lote b_1, b_2, b_3 auf die Gerade $A_{12}J_{23}$, so ist (Fig. 225):

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{r_1}{r_3},\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_1}{r_2},\ \frac{b_2}{b_3} = \frac{r_2}{r_3} \text{ und } \frac{b_1}{b_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{r_2}{r_3},$$

aus den beiden letzten:

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{r_1}{r_3},$$

folglich sind die Geraden $A_{12}A_{13}$ und $A_{12}J_{23}$ auch Ähnlichkeitstrahlen für die Kreise M_2 und M_3, bezw. M_1 und M_3. Die drei äufsern Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen also in einer Geraden, und jeder äufsere Ähnlichkeitspunkt liegt mit den beiden nicht zugehörigen innern ebenfalls in einer Geraden.

Jede dieser Geraden nennt man eine Ähnlichkeitsachse der gegebenen Kreise.

10. Wenn man auch Kreise von unendlich kleinem oder unendlich grofsem Radius zuläfst, so können folgende Fälle unterschieden werden: 1) beide Kreise sind Punkte, 2) der eine ist ein Punkt, der andere ein Kreis oder eine Gerade, 3) der eine ist eine Gerade, der andere ein Kreis oder ebenfalls eine Gerade.

Da die Ähnlichkeitspunkte die Mittelpunkte harmonisch im Verhältnis der Radien trennen, so ist:

$$\frac{AM_1}{r_1} = \frac{AM_2}{r_2} = \frac{M_1M_2}{r_1 - r_2} \text{ und } \frac{JM_1}{r_1} = \frac{JM_2}{r_2} = \frac{M_1M_2}{r_2 + r_1},$$

wenn $r_2 > r_1$ vorausgesetzt wird. Es folgt:

$$AM_1 = M_1M_2 \cdot \frac{r_1}{r_1 - r_2} \text{ und } JM_1 = M_1M_2 \cdot \frac{r_1}{r_2 + r_1}.$$

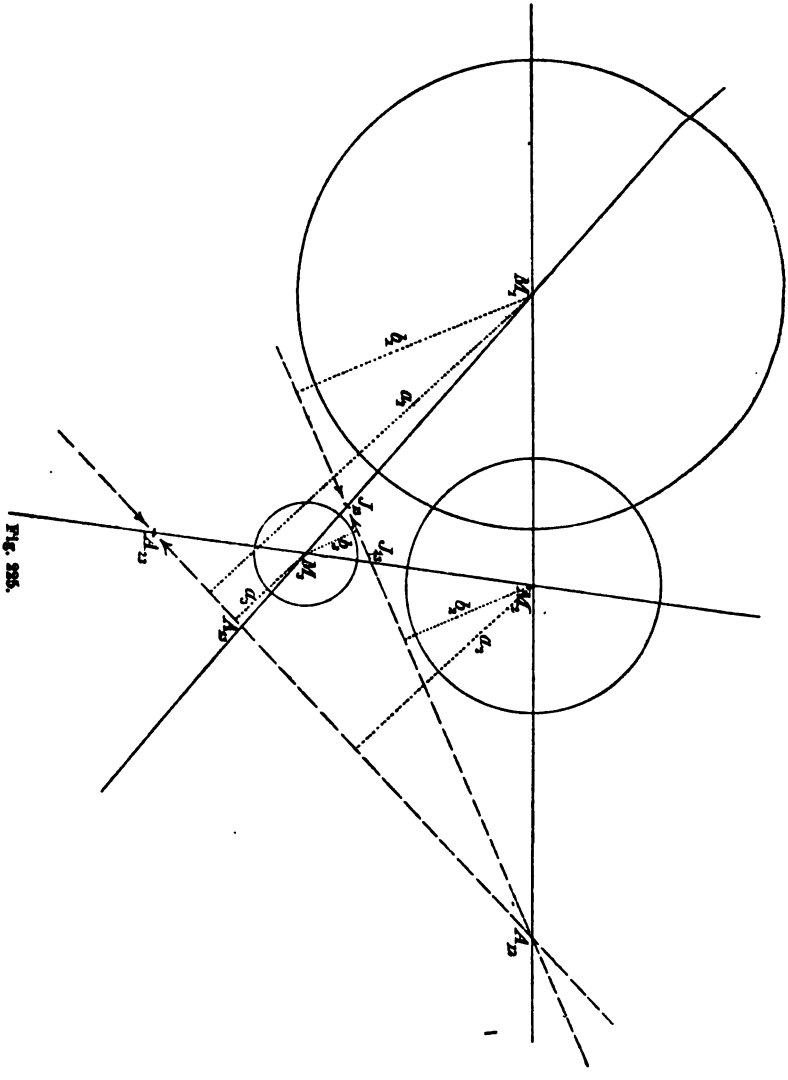


Fig. 225.

Im ersten Falle ist $r_1 = r_2 = 0$. Die Werte für AM_1 und JM_1 nehmen also die Form $\frac{0}{0}$ an und werden unbestimmt. Zwei Punkte haben also keine Ähnlichkeitspunkte.

Im zweiten Fall ist entweder $r_1 = 0$ und $r_2 \neq 0$ oder $r_1 = 0$ und $r_2 = \infty$. In beiden Fällen ist $AM_1 = 0$ und $JM_1 = 0$. Die Ähnlichkeitspunkte eines Punktes und eines Kreises oder eines Punktes und einer Geraden fallen also beide mit dem gegebenen Punkte zusammen.

Im dritten Falle berücksichtige man, daſs jeder Ähn-

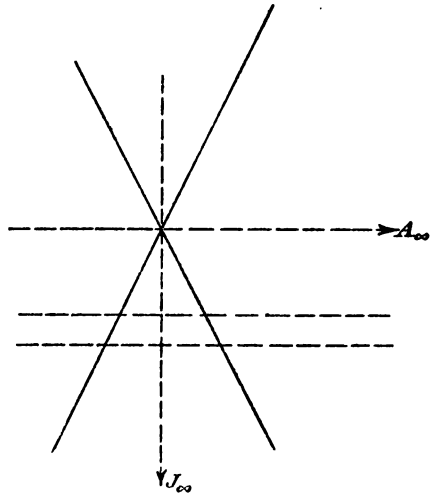


Fig. 226.

lichkeitstrahl die gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

Sind nun zwei Gerade gegeben (Fig. 226), so werden diese unter gleichen Winkeln geschnitten von allen Geraden, die mit den gegebenen ein gleichschenkeliges Dreieck bestimmen. Diese Geraden sind aber zu den Halbierungslinien der Winkel der gegebenen Geraden beziehungsweise parallel. Die Ähnlichkeitspunkte von zwei Geraden sind also die unendlich fernen Punkte auf den Halbierungslinien ihrer Winkel.

Geht von den gegebenen Kreisen nur der eine in eine Gerade über (Fig. 227), so muſs der Kreis von jedem Ähnlichkeitstrahle so geschnitten werden, daſs die Tangente

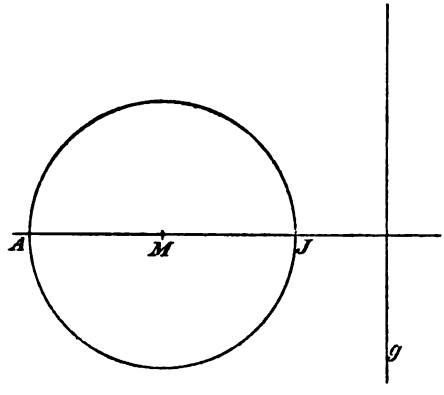


Fig. 227.

im Schnittpunkte zu der gegebenen Geraden parallel ist. Die Ähnlichkeitspunkte eines Kreises und einer Geraden sind daher die Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers.

Übungen zu § 54.

1. Welches sind die Ähnlichkeitspunkte von zwei gleichen Kreisen?

2. Welches sind die Ähnlichkeitspunkte für den Umkreis eines Dreiecks und seinen Feuerbachschen Kreis?

3. Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise mit alleiniger Hilfe des Lineales zu zeichnen.

4. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise mit alleiniger Hilfe des Lineales zu ziehen.

5. Einen Ähnlichkeitstrahl zweier Kreise zu zeichnen, der diese unter einem gegebenen Winkel schneidet.

6. Alle Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kreise in nicht entsprechenden Punkten für denselben Ähnlichkeitspunkt schneiden, haben einen zweiten Punkt gemein. Wenn der erste gegeben ist, den zweiten zu konstruieren. (Jene Kreise sind Orthogonalkreise einer Basis der gegebenen Kreise. Siehe § 52, 3.)

7. Alle Kreise, welche zwei gegebene in nicht entsprechenden Punkten für denselben Ähnlichkeitspunkt schneiden und einen zugehörigen Ähnlichkeitstrahl berühren, berühren diesen in demselben Punkte.

8. Welches ist der Ort für die Berührungspunkte aller Kreise, die zwei gegebene in nicht entsprechenden Punkten für denselben Ähnlichkeitspunkt schneiden, mit der Gesamtheit der Geraden, die durch diesen Ähnlichkeitspunkt hindurchgehen?

9. Einen Kreis zu zeichnen, bezüglich dessen zwei gegebene Kreise verwandt sind.

10. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der zwei gegebene Kreise unter einem gegebenen Winkel schneidet. (Nr. 6 und § 52, Übung Nr. 9.)

11. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der zwei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln oder unter Supplementwinkeln schneidet.

12. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der eine gegebene Gerade berührt und zwei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln oder unter Supplementwinkeln schneidet.

13. Einen Punkt zu finden, von dem aus drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden.

14. Wieviel Schnittpunkte werden durch die drei Kreise bestimmt, deren Durchmesser die Abstände der Ähnlichkeitspunkte von je zwei unter drei gegebenen Kreisen sind?

15. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade unter je einem gegebenen Winkel schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht. (Man bestimme auf einem andern Kreise, der die gegebenen Geraden unter den vorgeschriebenen Winkeln schneidet, den entsprechenden Punkt zu dem gegebenen Punkte.)

16. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

17. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

18. Einen Kreis zu zeichnen, der jede von drei gegebenen Geraden unter einem gegebenen Winkel schneidet.

19. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, für die das Verhältnis der Abstände von zwei gegebenen Punkten vorgeschrieben ist.

20. Eine Gerade zu ziehen, deren Abstände von drei gegebenen Punkten sich wie drei gegebene Strecken verhalten.

21. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, für die das Verhältnis der Abstände von zwei gegebenen Punkten vorgeschrieben ist.

22. Die Radien der äußern und der innern Basis von zwei gegebenen Kreisen und ihre Centrale sind die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks.

Zwanzigstes Kapitel.

Die Kreisbüschel.

§ 55. Der Potenzbegriff und die Potenzlinien zweier Kreise.

1. Wenn man in der Ebene des Kreises M durch einen beliebigen Punkt P Sekanten zieht (Fig. 228), so sind die Rechtecke aus den Abschnitten, die P mit den Kreis-

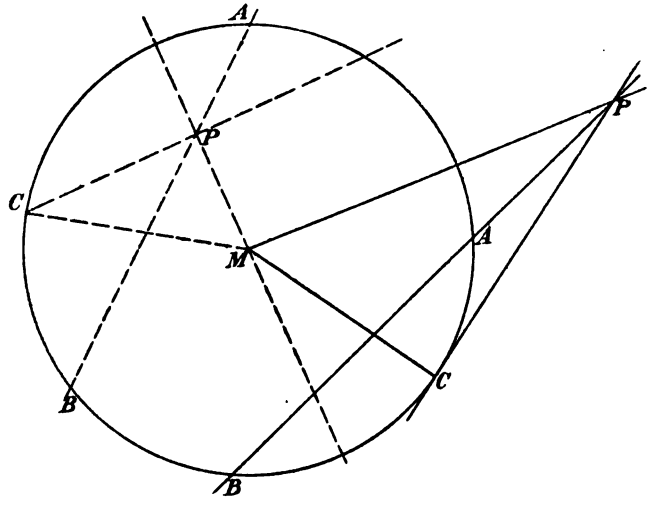


Fig. 228.

punkten derselben Sekante begrenzt, einander gleich. Liegt P aufserhalb des Kreises, so ist jedes solche Rechteck gleich dem

Quadrat über der durch P bestimmten Tangente; wenn P innerhalb des Kreises liegt, so ist das Rechteck gleich dem Quadrat über der Hälfte der kleinsten Sehne, die durch P geht. Im erstern Falle ist es also um das Quadrat über dem Radius kleiner als das Quadrat über dem Mittelpunktsabstande des Punktes P; im zweiten Falle ist es um das Quadrat über dem Mittelpunktsabstande von P kleiner als das Quadrat über dem Radius.

Bildet man für jeden Punkt der Ebene die Differenz

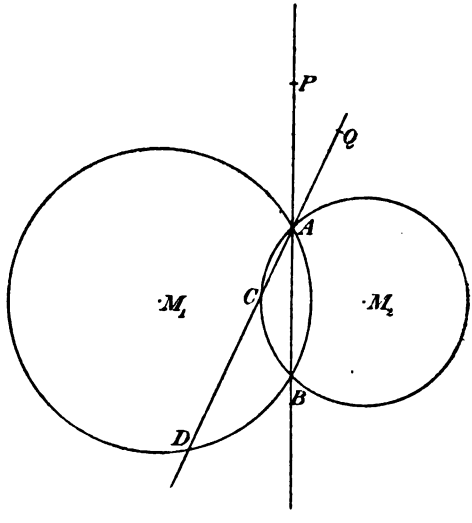


Fig. 229.

zwischen der Maſszahl des Quadrats über seinem Mittelpunktsabstande und der Maſszahl des Quadrats über dem Radius des Kreises M, so heiſst diese Differenz die Potenz des Kreises M für den Punkt P. Die Potenz ist positiv für jeden Punkt auſserhalb des Kreises, Null für jeden Punkt auf dem Kreise, negativ für jeden Punkt innerhalb des Kreises. Das Produkt aus den Maſszahlen der Abschnitte irgend einer durch P gehenden Sekante ist gleich der Potenz für den Punkt P oder dieser Potenz entgegengesetzt, je nachdem P auſserhalb oder innerhalb

des Kreises liegt. Für den Mittelpunkt des Kreises ist die Potenz der Maſszahl des Quadrats über dem Radius entgegengesetzt. Beschreibt ein Punkt einen Strahl, der vom Mittelpunkte ausgeht, so geht die Potenz für den Punkt von dem Werte $-r^2$ aus, geht von dem Negativen ins Positive über, wenn der Punkt die Kreislinie überschreitet, und wird schlieſslich unendlich groſs.

2. Wenn zwei Kreise M_1 und M_2 sich in A und B schneiden, so sind für alle Punkte der Geraden AB die Potenzen beider Kreise einander gleich (Fig. 229).

Liegt Q auſserhalb der Geraden AB, so schneidet die Gerade QA entweder jeden Kreis in je einem zweiten Punkte, oder QA ist für den einen Kreis eine Tangente. Im ersten Falle sind die Potenzen der beiden Kreise für den Punkt Q den Maſszahlen der Prodnkte $QA \cdot QC$ und $QA \cdot QD$ beziehungsweise gleich oder entgegengesetzt, je nachdem Q innerhalb (auſserhalb) jedes der beiden Kreise oder innerhalb des einen, aber auſserhalb des andern liegt; die Potenzen beider Kreise für den Punkt Q sind also verschieden. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn QA den einen Kreis berührt. Die gemeinschaftliche Sehne von zwei sich schneidenden Kreisen ist somit der Ort für die Punkte gleicher Potenz und heiſst deswegen die Potenzlinie beider Kreise.

Ist P ein Punkt von AB auſserhalb beider Kreise, so gelten für die Tangenten, die von P aus an beide Kreise gehen, die Beziehungen (Fig. 230):

$$\overline{PC_1}^2 = PA \cdot PB \quad \text{und} \quad \overline{PC_2}^2 = PA \cdot PB$$

also:

$$PC_1 = PC_2.$$

Die von einem Punkte gleicher, aber positiver Potenz ausgehenden Tangenten sind somit gleich, und der Punkt ist Mittelpunkt eines Orthogonalkreises der gegebenen Kreise.

Wenn Q ein Punkt der Strecke AB ist (Fig. 230), so sind die Quadrate über den halben Sehnen, die auf M_1Q und M_2Q beziehungsweise senkrecht stehen, dem Rechteck $QA \cdot QB$, also einander gleich. Jeder Punkt gleicher, aber negativer Potenz ist daher Mittelpunkt eines Kreises, der von jedem der gegebenen Kreise unter dem Durchmesser geschnitten wird.

Wenn AB die Centrale in S schneidet, so gelten für jeden Punkt von AB die Beziehungen:

$$\overline{PM_1}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SM_1}^2 \quad \text{und} \quad \overline{PM_2}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SM_2}^2,$$

mithin auch:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = \overline{SM_1}^2 - \overline{SM_2}^2.$$

Für den Punkt A ist aber:

$$\overline{AM_1}^2 - \overline{AM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

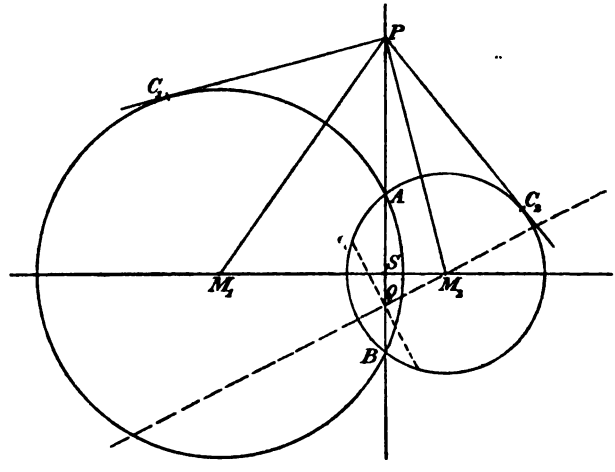


Fig. 280.

also ergiebt sich für jeden Punkt P von AB die Bedingung:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Der Ort für die Punkte gleicher Potenz ist somit identisch mit dem Ort für alle Punkte, für die die Differenz der Quadrate über den Mittelpunktsabständen gleich der Differenz der Quadrate über den Radien ist. Letzterer Ort existiert aber auch, wenn die gegebenen Kreise sich nicht schneiden (§ 39, 4); folglich giebt es auch eine Potenzlinie für Kreise, die keinen Punkt gemein haben. Der Ort für die Punkte gleicher Potenz zweier Kreise ist also eine Gerade, die auf der Centrale senkrecht steht; jeder Punkt

gleicher Potenz ist entweder gemeinschaftlicher Endpunkt von gleichen Tangenten und Mittelpunkt eines Orthogonalkreises beider Kreise oder Mittelpunkt eines Kreises, der von jedem der gegebenen Kreise unter dem Durchmesser geschnitten wird, je nachdem die Potenz für den Punkt positiv oder negativ ist.

3. Wenn zwei Kreise M_1 und M_2 von einem dritten Kreise K geschnitten werden (Fig. 231), so ist der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Sehnen von M_1 und K und von M_2 und K ein Punkt gleicher Potenz oder kürzer ein Potenzpunkt für M_1 und M_2. Wenn sich M_1 und M_2

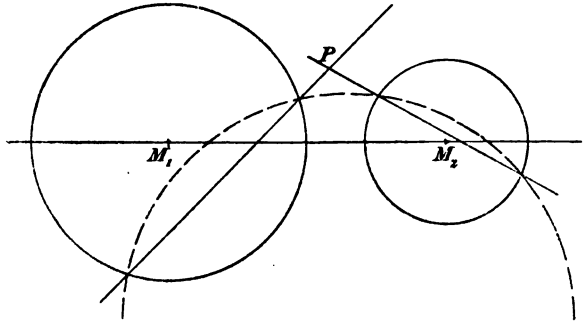


Fig. 231.

nicht schneiden, so kann also die Potenzlinie unter Benutzung von zwei Hilfskreisen K erhalten werden.

Da durch zwei Paare nicht entsprechender Punkte für denselben Ähnlichkeitspunkt ein Kreis gelegt werden kann, so schneidet die Verbindungslinie von zwei Punkten des einen Kreises die Verbindungslinie der nicht entsprechenden Punkte des andern in einem Potenzpunkte beider Kreise. Nicht entsprechende Punkte können aber mit alleiniger Hilfe des Lineales konstruiert werden, also auch die Potenzlinie.

4. Wenn zwei Kreise gemeinschaftliche Tangenten besitzen, so wird auf jeder Tangente der Abschnitt zwischen den Berührungspunkten durch die Potenzlinie halbiert, da ja von den Mittelpunkten jener Abschnitte aus gleiche

Tangenten an beide Kreise gehen. Die Potenzlinie ist also die Achse des Streifens, der durch die beiden Polaren eines Ähnlichkeitspunktes bestimmt wird. Diese Beziehung bleibt bestehen, wenn die gegebenen Kreise keine gemeinschaftlichen Tangenten besitzen.

Ist nämlich Q der Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Centrale c (Fig. 232), so ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$\overline{QM_1}^2 - \overline{QM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad \text{und} \quad QM_1 - QM_2 = c$$

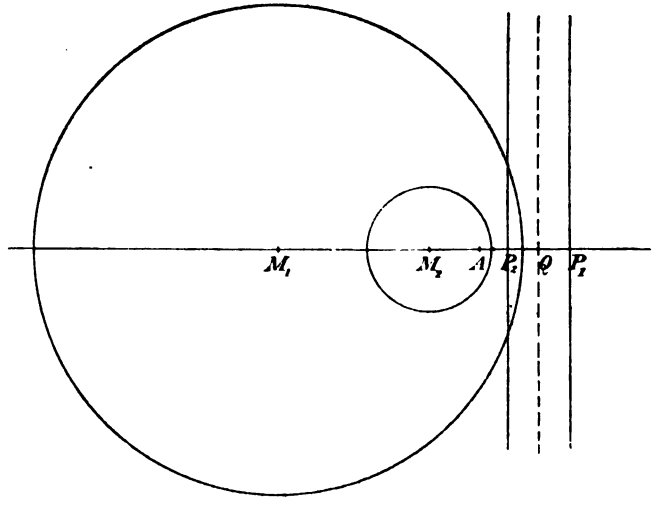


Fig. 232.

die folgende:

$$M_1 Q = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}.$$

Wenn die Polaren des Ähnlichkeitspunktes A die Centrale beziehungsweise in P_1 und P_2 schneiden, so erhält man weiter:

$$M_1 P_1 = \frac{r_1^2}{AM_1} = \frac{r_1 (r_1 - r_2)}{c} \quad \text{und} \quad M_2 P_2 = \frac{r_2 (r_1 - r_2)}{c},$$

folglich:

$$M_1 P_2 = \frac{r_2 (r_1 - r_2) + c^2}{c} \text{ und } M_1 P_2 + M_1 P_1 = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{c},$$

also:

$$M_1 Q = \frac{M_1 P_2 + M_1 P_1}{2}.$$

5. Werden Kreise mit unendlich kleinem und unendlich grofsem Radius zugelassen, so kann man zwei Fälle unterscheiden: 1) für beide Kreise treten Punkte oder Gerade ein, 2) nur der eine Kreis geht in einen Punkt oder eine Gerade über, oder für den einen Kreis tritt ein Punkt und für den andern eine Gerade ein.

Versteht man wieder unter Q den Schnittpunkt der Potenzlinie mit der Centrale der gegebenen Kreise, so ist $M_1 Q = \frac{c}{2}$, wenn jeder Kreis einen unendlich kleinen Radius hat; dagegen wird der Ausdruck $r_1^2 - r_2^2$, mithin auch MQ, unbestimmt, wenn beide Radien unendlich grofs werden. Die Potenzlinie zweier Punkte ist also ihre Achse, die Potenzlinie von zwei Geraden ist unbestimmt.

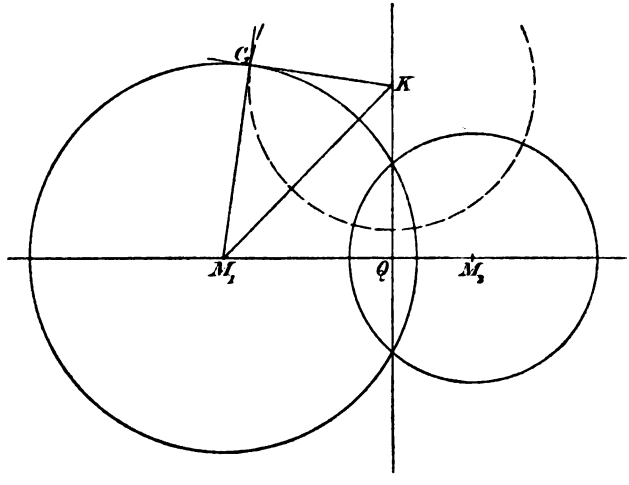


Fig. 234.

Im zweiten Falle berücksichtige man, dafs die Potenzlinie die Achse der Polaren eines Ähnlichkeitspunktes der gegebenen Gebilde ist. Dann ergiebt sich: Die Potenzlinie eines Punktes und eines Kreises ist die Mittelsenkrechte

des von dem Punkte auf seine Polare gefällten Lotes; die Potenzlinie einer Geraden und eines Kreises oder einer Geraden und eines Punktes ist die Gerade selbst.

6. Sei K ein Potenzpunkt der Kreise M_1 und M_2, KC_1 die Tangente an M_1, so ist (Fig. 234 u. 235):

$$\overline{KC_1}^2 = \overline{KM_1}^2 - r_1^2 \text{ und } \overline{KQ}^2 = \overline{KM_1}^2 - \overline{QM_1}^2.$$

Wenn die Kreise M_1 und M_2 sich schneiden, so liegt Q innerhalb beider Kreise (Fig. 234), also:

$$QM_1 < r_1 \text{ und } KC_1 < KQ.$$

Haben M_1 und M_2 keinen Punkt gemein (Fig. 235), so liegt Q aufserhalb jedes der gegebenen Kreise, mithin:

$$QM_1 > r_1 \text{ und } KC_1 > KQ.$$

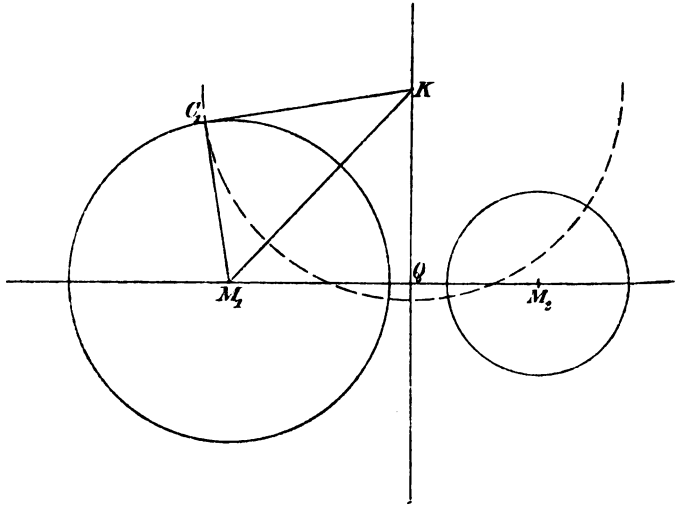


Fig. 235.

Da nun KC_1 der Radius des Orthogonalkreises K ist, so wird die Centrale M_1M_2 durch den Kreis K im zweiten Falle geschnitten, im ersten aber nicht.

Sind K_1 und K_2 zwei Orthogonalkreise von M_1 und M_2 (Fig. 236 u. 237), so sind auch M_1 und M_2 Orthogonalkreise von K_1 und K_2, mithin die Centrale M_1M_2 die Potenzlinie

der Kreise K_1 und K_2. Schneiden sich K_1 und K_2, so ist jeder Schnittpunkt ein Potenzpunkt für die Kreise K_1 und K_2, mithin ein Punkt der Centrale $M_1 M_2$.

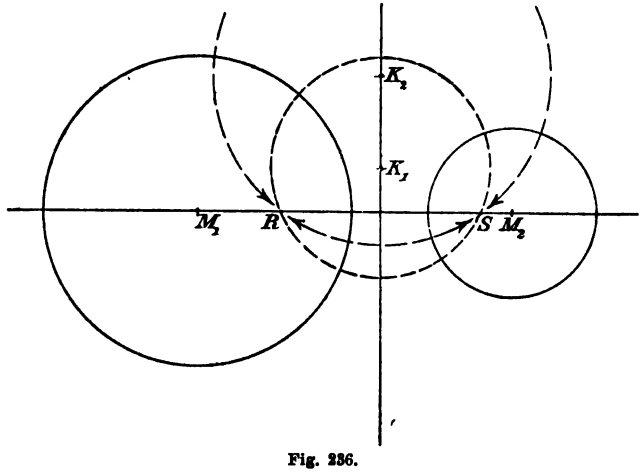


Fig. 236.

Schneidet der Orthogonalkreis K_1 die Centrale $M_1 M_2$ in den Punkten R und S (Fig. 236), so sind diese Punkte sowohl für K_1 als auch für jeden andern Orthogonalkreis

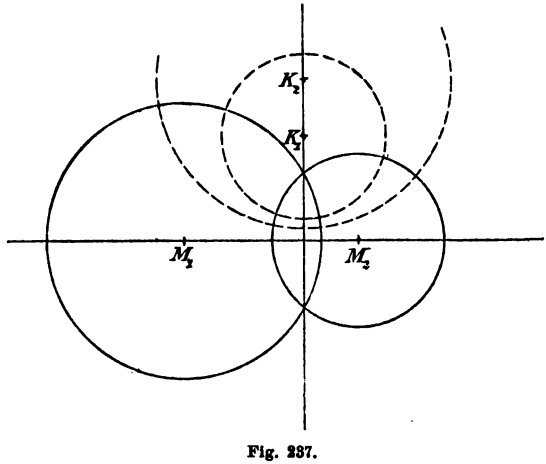


Fig. 237.

K_2 Punkte von der Potenz Null; jeder Orthogonalkreis von M_1 und M_2 geht also durch R und S. Wird die Centrale $M_1 M_2$ von keinem Orthogonalkreise der Kreise M_1 und M_2 geschnitten (Fig. 237), so schneiden sich keine zwei unter diesen Orthogonalkreisen.

Wenn die Kreise M_1 und M_2 sich schneiden (Fig. 237), so haben je zwei Kreise, die durch ihre Schnittpunkte gelegt werden, dieselbe Potenzlinie wie M_1 und M_2 selbst und für jeden Punkt der Potenzlinie auch dieselbe Potenz wie M_1 und M_2; mithin schneiden die Orthogonalkreise von M_1 und M_2 jeden Kreis rechtwinkelig, der durch die Schnittpunkte von M_1 und M_2 hindurchgeht.

Wenn die Kreise M_1 und M_2 sich nicht schneiden (Fig. 236), so ist jeder Kreis K_2, der durch die Schnittpunkte der Centrale $M_1 M_2$ und eines Orthogonalkreises K_1 von M_1 und M_2 geht, selbst ein Orthogonalkreis von M_1 und M_2. Jeder Punkt der Centrale $M_1 M_2$ ist dann Mittelpunkt eines Orthogonalkreises von K_2 und K_1, aber keiner dieser Orthogonalkreise schneidet die Kreise M_1 und M_2. Somit ergiebt sich zusammenfassend:

Je nachdem zwei Kreise M_1 und M_2 sich schneiden oder nicht, besitzen sie unzählig viele Orthogonalkreise, von denen keiner den andern schneidet, oder jeder jeden andern in denselben Punkten der Centrale $M_1 M_2$ schneidet. In beiden Fällen giebt es noch unendlich viele Kreise, von denen je zwei dieselbe Potenzlinie und dieselben Orthogonalkreise besitzen wie M_1 und M_2 selbst; alle diese Kreise schneiden sich in den Schnittpunkten von M_1 und M_2, oder es haben keine zwei unter ihnen einen gemeinschaftlichen Punkt, je nachdem M_1 und M_2 sich schneiden oder nicht.

Die Forderung, dafs ein Orthogonalkreis von M_1 und M_2 die Centrale schneidet, ist identisch mit der Forderung, dafs es zwei Punkte giebt, die sowohl für die Basis M_1 als auch für die Basis M_2 verwandt sind. Zwei sich schneidende Kreise besitzen demnach keine gemeinschaftlichen verwandten Punkte; Kreise, die sich nicht schneiden, haben ein einziges Paar von verwandten Punkten gemein. Oder auch: Zwei Paare von Punkten, die auf derselben Geraden liegen, werden durch ein einziges drittes Paar

harmonisch getrennt oder nicht, je nachdem die Punkte des einen Paares durch die des andern nicht getrennt oder getrennt werden.

7. Alle Kreise, die durch A und B gehen, haben AB als gemeinschaftliche Potenzlinie und die Mittelsenkrechte von AB als gemeinschaftliche Centrale, und für alle Kreise, die jene rechtwinkelig schneiden, ist die Mittelsenkrechte von AB die gemeinschaftliche Potenzlinie und AB die gemeinschaftliche Centrale.

Die Gesamtheit der Kreise, die eine gemeinschaftliche Potenzlinie und eine gemeinschaftliche Centrale besitzen,

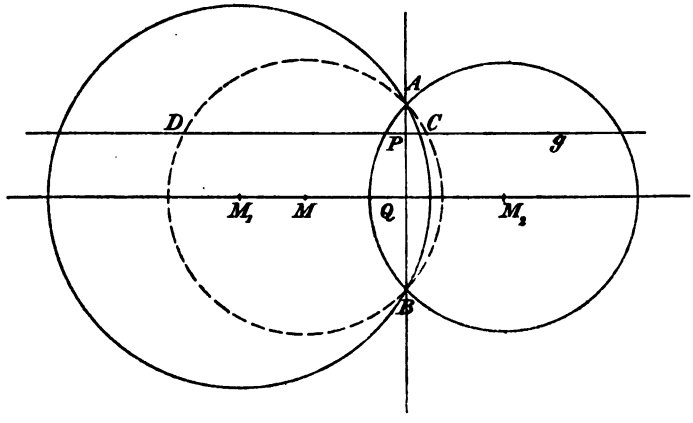


Fig. 238.

bildet einen Kreisbüschel. Es sind zweierlei Kreisbüschel zu unterscheiden, je nachdem alle Kreise eines Büschels durch dieselben beiden Punkte, die Grundpunkte des Büschels, gehen, oder unter den Kreisen eines Büschels keine zwei einander schneiden. Liegen zwei Büschel so, daſs jeder Kreis des einen jeden Kreis des andern rechtwinkelig schneidet, so heiſsen die Büschel konjugiert. Von zwei konjugierten Büscheln besitzt der eine zwei Grundpunkte, der andere keine; die Centrale eines Büschels ist die Potenzlinie des konjugierten Büschels.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Büschel mit zwei Grundpunkten A und B (Fig. 238), M ein beliebiger Kreis des Büschels, g eine

Parallele zu der Centrale des Büschels, die M in C und D schneidet, P der Schnittpunkt von g und AB, so ergiebt sich:

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB.$$

Wenn Q der Schnittpunkt der Centrale und der Potenzlinie des Büschels ist, und PD durch die kleinere Strecke QM ersetzt wird, folgt weiter ($\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. Siehe § 49, 1):

$$PC < \frac{\overline{AQ}^2}{QM}.$$

Man kann nun M in solcher Entfernung von AB wählen, dafs die Strecke $\frac{\overline{AQ}^2}{QM}$ kleiner als die beliebig kleine, von vornherein vorgeschriebene Strecke ε wird, dann wird auch

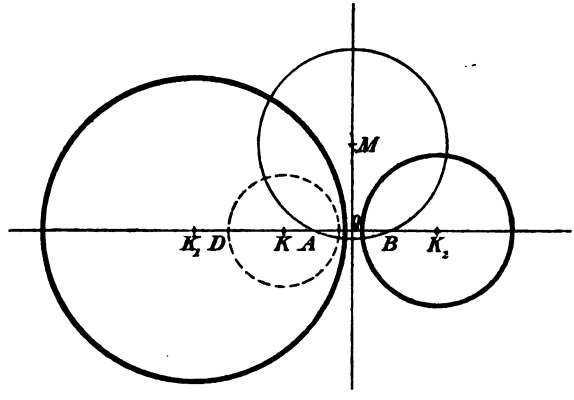


Fig. 239.

$PC < \varepsilon$, und die Punkte P und C, d. h. je ein Punkt des Kreises M und der auf derselben Parallele zur Centrale liegende Punkt der Potenzlinie, können nicht mehr unterschieden werden. Wir sind daher berechtigt, die Potenzlinie als einen unendlich grofsen Kreis des Büschels $\mathfrak{M}$ zu betrachten.

Sei $\mathfrak{K}$ ein Büschel ohne Grundpunkte (Fig. 239), K_1 und K_2 zwei Kreise desselben, ϱ_1 und ϱ_2 ihre Radien,

M ein Orthogonalkreis von K_1 und K_2, der die Centrale K_1K_2 in A und B schneidet. Jeder Punkt K der Centrale, welcher nicht zwischen A und B liegt, ist Mittelpunkt eines Kreises, der dem Büschel $\mathfrak{R}$ angehört und dessen Radius ϱ durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\varrho^2 = KA \cdot KB.$$

Es ist nämlich:

$$\varrho_1^2 = K_1A \cdot K_1B.$$

Wird der Schnittpunkt der Potenzlinie und der Centrale wieder mit Q bezeichnet, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\varrho^2 = \overline{KQ}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} \quad \text{und} \quad \varrho_1^2 = \overline{K_1Q}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

woraus folgt:

$$\overline{KQ}^2 - \overline{K_1Q}^2 = \varrho^2 - \varrho_1^2.$$

Die Potenzlinie der Kreise K und K_1 ist also das in Q auf K_1K_2 errichtete Lot, somit identisch mit der Potenzlinie der Kreise K_1 und K_2, d. h. der Kreis K gehört dem Büschel $\mathfrak{R}$ an.

Man kann nun K so wählen, daſs $\overline{KQ}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} < \varepsilon^2$ wird, wenn ε wieder eine beliebig kleine, von vornherein vorgeschriebene Strecke ist; dann wird $\varrho < \varepsilon$. Wurde K in der Halbebene A gewählt, so folgt weiter:

$$KA\,(KA + AB) < \varepsilon^2 \quad \text{und} \quad KA < \frac{\varepsilon^2}{AB}.$$

Ist nun D der Punkt des Kreises K, der von A den gröſsten Abstand hat, so erhält man schlieſslich:

$$AD = \varrho + KA \quad \text{und} \quad AD < \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{AB}.$$

Die Punkte des Kreises K können daher nicht mehr von dem Punkte A unterschieden werden, mithin muſs der Punkt A als ein unendlich kleiner Kreis oder ein Punktkreis des Büschels $\mathfrak{R}$ aufgefaſst werden. Dasselbe gilt vom Punkte B. Die Potenzlinie des Büschels $\mathfrak{R}$ ist wieder als der unendlich groſse Kreis des Büschels $\mathfrak{R}$ zu betrachten.

8. Sei $\mathfrak{M}$ ein Büschel mit den Grundpunkten A und B (Fig. 240).

Da jeder Kreis des Büschels $\mathfrak{M}$ durch A und B geht, so ist bezüglich des Kreises um A mit dem Radius AB jedem Kreise des Kreisbüschels $\mathfrak{M}$ eine Gerade des Strahlenbüschels B verwandt (§ 52, 4). Jede Eigenschaft eines Kreises des Büschels $\mathfrak{M}$ kann daher auf eine Gerade des Büschels B übertragen werden, und zu jeder Eigenschaft einer Geraden des Strahlenbüschels gehört eine entsprechende Eigenschaft eines Kreises des Kreisbüschels.

Durch jeden Punkt der Ebene wird eine einzige Gerade des Strahlenbüschels bestimmt, folglich geht durch jeden

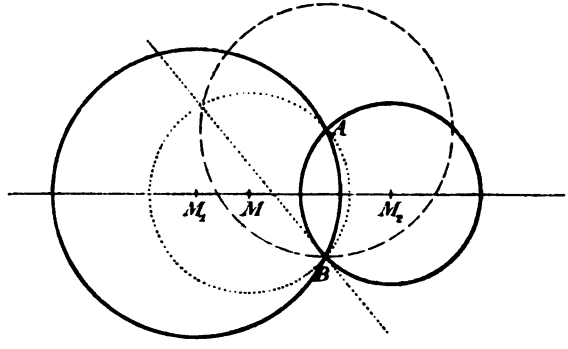


Fig. 240.

Punkt der Ebene ein einziger Kreis des Kreisbüschels. In dem Strahlenbüschel B giebt es eine einzige Gerade, die einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet; also enthält der Kreisbüschel $\mathfrak{M}$ einen einzigen Kreis, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet. Dem Strahlenbüschel B gehören im allgemeinen zwei Gerade an, die einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneiden oder einen gegebenen Kreis berühren; folglich giebt es in dem Kreisbüschel $\mathfrak{M}$ im allgemeinen auch zwei Kreise, die einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneiden oder einen gegebenen Kreis berühren.

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kreisbüschel ohne Grundpunkte (Fig. 241), A und B die Punktkreise des Büschels, $\mathfrak{M}$ der konjugierte Kreisbüschel.

Wird der Kreis um A mit dem Radius AB als Basis einer Kreisverwandtschaft angenommen, so ist jeder Strahl des Strahlenbüschels B einem Kreise des Kreisbüschels $\mathfrak{M}$ verwandt. Den Kreisen des Büschels $\mathfrak{K}$ ist

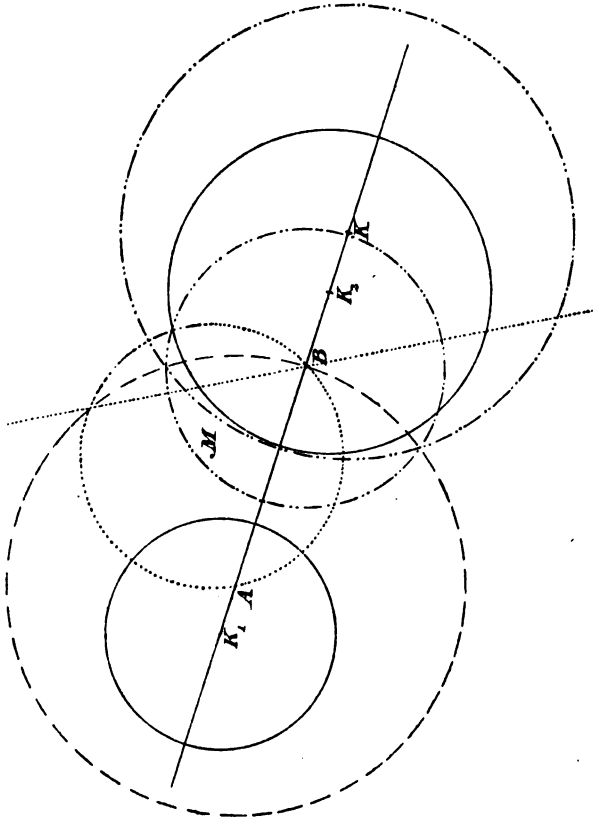


Fig. 241.

also die Gesamtheit aller Kreise verwandt, die jeden Strahl des Strahlenbüschels B rechtwinkelig schneiden, also die Gesamtheit der konzentrischen Kreise um den Punkt B, der konzentrische Kreisbüschel $\mathfrak{B}$. Jede Eigenschaft eines Kreises des Kreisbüschels $\mathfrak{K}$ ist somit übertragbar auf einen Kreis des konzentrischen Kreisbüschels $\mathfrak{B}$, und um-

gekehrt entspricht jeder Eigenschaft, die den Kreisen des Büschels $\mathfrak{B}$ zukommt, eine Eigenschaft der Kreise des Büschels $\mathfrak{K}$. So giebt es z. B. in dem Büschel $\mathfrak{B}$ im allgemeinen zwei Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren, folglich gehören im allgemeinen auch dem Büschel $\mathfrak{K}$ zwei Kreise an, die einen gegebenen Kreis berühren. Man gelangt so bei den Kreisen des Büschels $\mathfrak{K}$ zu denselben Ergebnissen wie vorher bei den Kreisen des Büschels $\mathfrak{M}$.

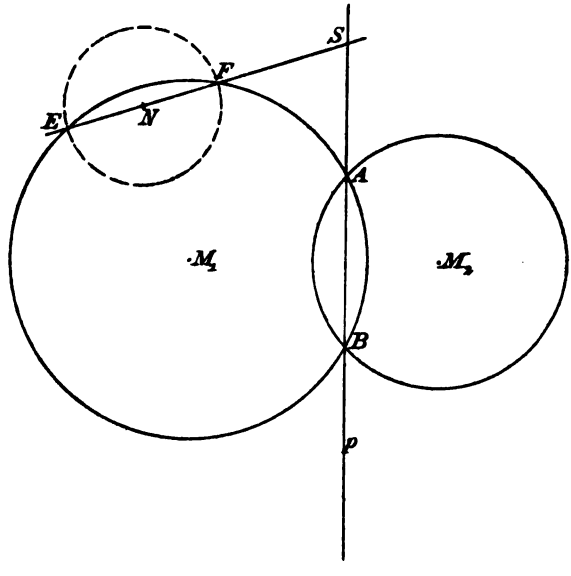


Fig. 242.

Sei N ein beliebiger Kreis der Ebene, $\mathfrak{M}$ ein Kreisbüschel der einen oder der andern Art (Fig. 242).

Wenn der Kreis N von einem Kreise M des Büschels $\mathfrak{M}$ unter dem Durchmesser EF geschnitten wird, so ist der Schnittpunkt S des Durchmessers EF mit der Potenzlinie p des Büschels $\mathfrak{M}$ ein Punkt gleicher Potenz für den Kreis N und alle Kreise des Büschels $\mathfrak{M}$. Jeder Kreis des Büschels $\mathfrak{M}$ bestimmt daher mit dem Kreise N eine Potenzlinie, die durch S geht; folglich kann S mit Hilfe eines beliebigen Kreises des Büschels $\mathfrak{M}$ konstruiert werden. Durch S wird aber ein

einziger Durchmesser des Kreises N bestimmt, also auch ein einziger Kreis des Büschels $\mathfrak{M}$, der N unter einem Durchmesser schneidet. Die erhaltenen Ergebnisse werden in folgendem Satze zusammengefafst: In jedem Kreisbüschel giebt es einen einzigen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt geht oder einen gegebenen Kreis rechtwinkelig oder unter einem Durchmesser schneidet, aber im allgemeinen zwei Kreise, die eine gegebene Gerade oder einen gegebenen Kreis

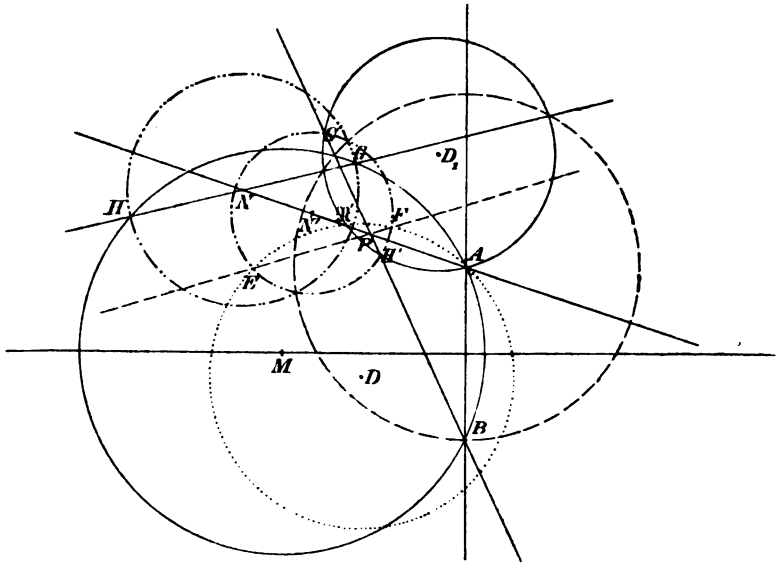


Fig. 243.

berühren oder unter einem gegebenen Winkel schneiden.

9. Dafs es in einem Kreisbüschel einen einzigen Kreis giebt, der einen gegebenen Kreis diametral schneidet, kann mit denselben Hilfsmitteln bewiesen werden wie die übrigen Teile des vorstehenden Satzes. Wenn die vorigen Bezeichnungen angewendet werden, so ist bezüglich der Basis A dem Kreisbüschel $\mathfrak{M}$ der Strahlenbüschel B und dem zu $\mathfrak{M}$ konjugierten Büschel $\mathfrak{K}$ der konzentrische Kreisbüschel $\mathfrak{B}$,

dem gegebenen Kreise N ein Kreis N', seinem Mittelpunkte N ein Punkt $\mathfrak{N}'$ verwandt (Fig. 243). Jedem Durchmesser des Kreises N ist ein Kreis verwandt, der durch A und $\mathfrak{N}'$ geht, d. h. ein Kreis eines Büschels $\mathfrak{D}$, dessen Grundpunkte A und $\mathfrak{N}'$ sind. Wenn D ein beliebiger Kreis dieses Büschels ist, der N' in E und F schneidet, so ist EF die Potenzlinie der Kreise D und N'; mithin ist P, der Schnittpunkt von EF und AN, ein Punkt gleicher Potenz für den Kreis N' und jeden Kreis des Büschels $\mathfrak{D}$. Jeder Kreis des Büschels $\mathfrak{D}$ bestimmt also mit N' eine Potenzlinie, die durch P geht; P kann daher mit Hilfe eines beliebigen Kreises des Büschels $\mathfrak{D}$ konstruiert werden.

Jede Gerade, die durch P geht, bestimmt auf dem Kreise N' zwei Punkte, durch die ein Kreis des Büschels $\mathfrak{D}$ gelegt werden kann. Zu diesen Geraden gehört ein einziger Strahl des Strahlenbüschels B, nämlich der Strahl BP (Fig. 243), und eine einzige Gerade g (Fig. 244), die den Kreis N' in zwei Punkten schneidet, die von B gleiche Abstände haben, nämlich das von P auf BN gefällte Lot.

Die Schnittpunkte der Geraden BP und des Kreises N' (Fig. 243), die Punkte G' und H', bestimmen einen Kreis D_1 des Büschels $\mathfrak{D}$, dem ein Durchmesser von N verwandt ist. Die Endpunkte dieses Durchmessers sind den Schnittpunkten der Geraden BP mit dem Kreise N' verwandt; sie liegen also auf dem Kreise, der mit BP verwandt ist. Dieser ist aber ein Kreis des Büschels $\mathfrak{M}$, also der einzige dieses Büschels, der N unter einem Durchmesser schneidet.

Die Schnittpunkte J', L' der Geraden g und des Kreises N' (Fig. 244) bestimmen einen Kreis D_2 des Büschels $\mathfrak{D}$ und sind daher den Endpunkten eines Durchmessers des Kreises N verwandt. Da sie aber von B gleiche Abstände haben, so kann durch sie ein Kreis des konzentrischen Büschels $\mathfrak{B}$ gelegt werden. Somit geht durch ihre verwandten Punkte J, L auf dem Kreise N ein Kreis des Büschels $\mathfrak{K}$, der einzige dieses Büschels, welcher den gegebenen Kreis N unter einem Durchmesser schneidet.

10. Wenn die Kreise M_1 und M_2 von dem Kreise K unter den Durchmessern B_1C_1 und B_2C_2 geschnitten werden (Fig. 245), so ist:

$$\overline{KM_1}^2 = \overline{KB_1}^2 - r_1^2 \quad \text{und} \quad \overline{KM_2}^2 = \overline{KB_2}^2 - r_2^2,$$

folglich, da $KB_1 = KB_2$ ist:

$$\overline{KM_2}^2 - \overline{KM_1}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Der Ort für K ist also eine zu der Centrale $M_1 M_2$ senkrechte Gerade (§ 39, 4).

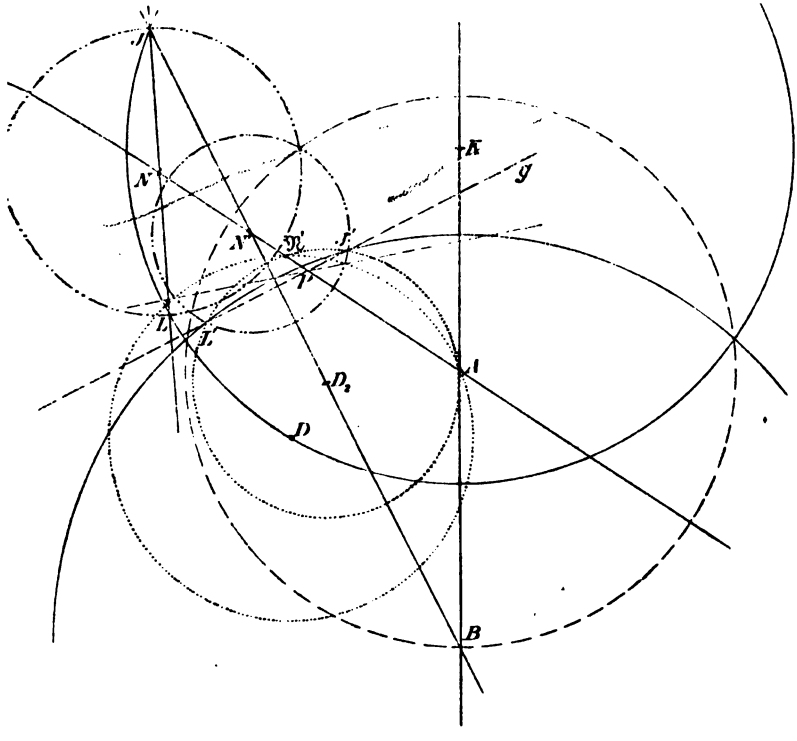


Fig. 244.

Für jeden Punkt P der Potenzlinie der Kreise M_1 und M_2 ist nun:

$$\overline{PM_1}^2 - \overline{PM_2}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Jeder Mittelpunkt eines Kreises, der M_1 und M_2 diametral schneidet, liegt also zu dem Mittelpunkte eines Orthogonalkreises von M_1 und M_2 in Bezug auf die Mittelsenkrechte

der Centrale symmetrisch, oder: Der Ort für die Mittelpunkte aller Diametralkreise von zwei gegebenen Kreisen ist eine Gerade, die zu der Potenzlinie beider Kreise bezüglich der Mittelsenkrechten der Centrale symmetrisch liegt.

Der Ort heifst die zweite Potenzlinie der gegebenen Kreise.

11. Sind K_1 und K_2 zwei Kreise, die M_1 und M_2 diametral schneiden, ϱ_1 und ϱ_2 ihre Radien, so ist:

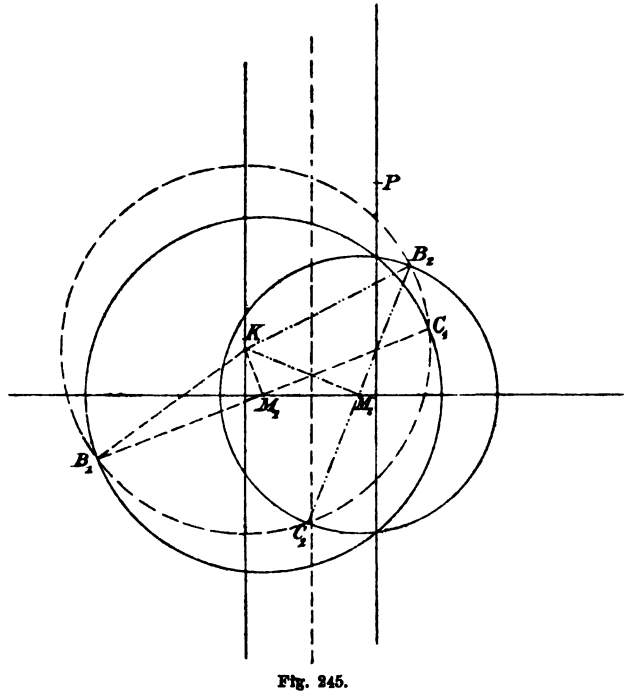


Fig. 245.

$$\overline{K_1 M_1}^2 = \varrho_1^2 - r_1^2 \quad \text{und} \quad \overline{K_2 M_1}^2 = \varrho_2^2 - r_1^2,$$

folglich auch:

$$\overline{M_1 K_1}^2 - \overline{M_1 K_2}^2 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\overline{M_2 K_1}^2 - \overline{M_2 K_2}^2 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2.$$

Die Punkte M_1 und M_2 sind demnach Potenzpunkte der Kreise K_1 und K_2, die Centrale M_1M_2 also ihre Potenzlinie. Alle Kreise, die M_1 und M_2 diametral schneiden, haben demnach die gemeinschaftliche Potenzlinie M_1M_2. Jeder Diametralkreis von M_1 und M_2 schneidet aber M_1M_2, folglich schneiden sie diese Gerade in denselben beiden Punkten, und es folgt: **Alle Kreise, die zwei gegebene**

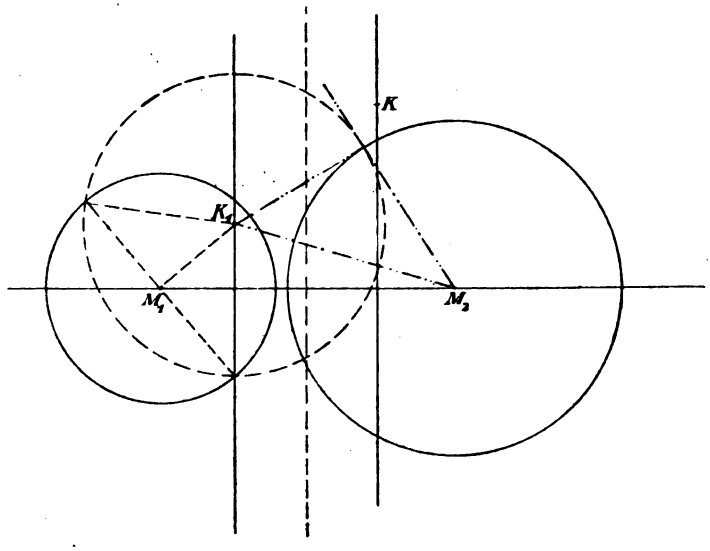


Fig. 246.

Kreise unter einem Durchmesser schneiden, bilden einen Kreisbüschel mit zwei Grundpunkten.

12. Wenn der Kreis K_1 vom Radius ϱ_1 den Kreis M_1 diametral und den Kreis M_2 orthogonal schneidet (Fig. 246), so ist:

$$\varrho_1^2 = \overline{K_1M_1}^2 + r_1^2 \quad \text{und} \quad \varrho_1^2 = \overline{K_1M_2}^2 - r_2^2,$$

also:

$$\overline{K_1M_2}^2 - \overline{K_1M_1}^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Der Ort für K_1 ist somit eine Gerade, die auf der Centrale M_1M_2 senkrecht steht.

Ist K_2 ein Kreis derselben Art wie K_1, so hat sowohl K_1 als auch K_2 im Punkte M_1 die Potenz $-r_1^2$ und im Punkte M_2 die Potenz $+r_2^2$; folglich ist M_1M_2 die Potenzlinie für alle Kreise, die M_1 diametral und M_2 orthogonal schneiden. Da diese Kreise aber die Gerade M_1M_2 schneiden, so folgt: Alle Kreise, die den einen von zwei gegebenen Kreisen diametral, den andern orthogonal schneiden, bilden einen Büschel mit zwei Grundpunkten.

Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die M_1 orthogonal und M_2 diametral schneiden, ist wieder eine Gerade, deren Punkte K der Gleichung genügen:

$$\overline{KM_1}^2 - \overline{KM_2}^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Diese Gerade liegt also zu der vorigen bezüglich der Mittelsenkrechten der Centrale symmetrisch. Beide Gerade heifsen die Potenzlinien dritter Art.

13. Sind M_1, M_2, M_3 drei gegebene Kreise, so schneidet jeder Orthogonalkreis der äufsern Basis A_{12} die Kreise M_1 und M_2, und jeder Orthogonalkreis der Basis A_{13} die Kreise M_1 und M_3 unter gleichen Winkeln. Die gemeinschaftlichen Orthogonalkreise von A_{12} und A_{13} schneiden somit die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln und sind daher auch Orthogonalkreise der äufsern Basis A_{23}. Letzterer Kreis gehört somit dem durch A_{12} und A_{13} bestimmten Kreisbüschel an (Fig. 247). Die genannten Orthogonalkreise bilden den konjugierten Büschel.

Jeder Orthogonalkreis, bez. jeder Diametralkreis, der innern Basis J_{13} schneidet M_1 und M_3 unter Supplementwinkeln. Jeder Kreis, der A_{12} orthogonal und zugleich J_{13} orthogonal oder diametral schneidet, schneidet somit zwei von den gegebenen Kreisen unter gleichen Winkeln, den dritten unter dem Supplementwinkel. Alle diese Kreise bilden wieder einen Büschel und schneiden auch die Basis J_{23} orthogonal oder diametral.

Zu jeder der durch A_{12} gehenden Ähnlichkeitsachsen gehört ein Büschel von Kreisen, die die gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln oder zwei von ihnen unter gleichen, den dritten unter dem Supplementwinkel schneiden. Da für jede der beiden andern Ähnlichkeitsachsen dasselbe gilt, so

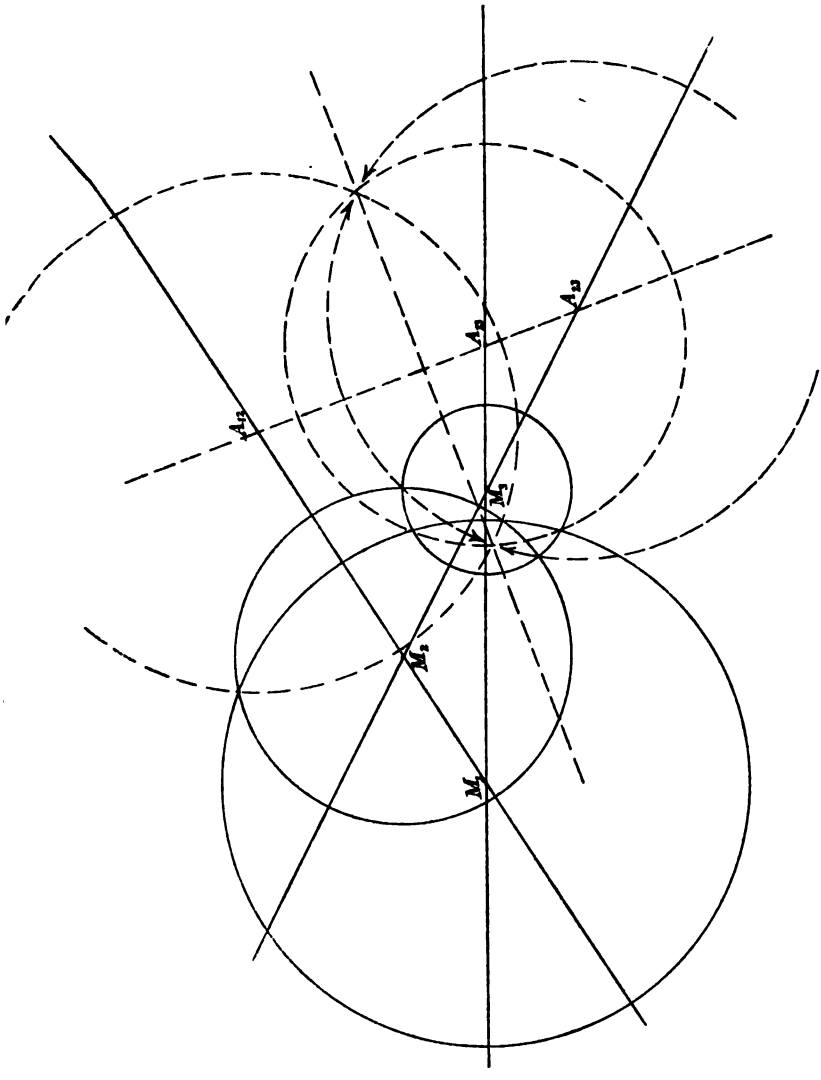


Fig. 247.

folgt: Die Gesamtheit der Kreise, die drei gegebene unter gleichen Winkeln, bez. zwei von ihnen unter gleichen, den dritten unter dem Supplementwinkel schneiden, besteht aus vier Kreisbüscheln.

14. Sind vier Kreise M_1, M_2, M_3, M_4 gegeben, so gehören zu ihnen 6 äufsere und 6 innere Ähnlichkeitspunkte:

$$A_{12},\ A_{13},\ A_{14},\ A_{23},\ A_{24},\ A_{34},\ J_{12},\ J_{13},\ J_{14},\ J_{23},\ J_{24},\ J_{34}.$$

Zu jeder Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kreise gehört ein Büschel von Kreisen, die jene unter gleichen oder unter Supplementwinkeln schneiden. Jeder dieser Büschel enthält einen einzigen Kreis, der eine vorgeschriebene Basis mit dem Zeiger 4 orthogonal oder diametral schneidet. Schneidet jener Kreis aber eine Basis mit dem Zeiger 4 in der angegebenen Weise, so ist er noch für zwei andere Basen, die den Zeiger 4 tragen, ein Orthogonalkreis oder ein Diametralkreis (siehe die Zusammenstellung). Folglich gehören zu jeder Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kreise zwei Kreise, die je drei Grundkreise mit dem Zeiger 4 orthogonal oder diametral schneiden; im ganzen giebt es also acht solcher Kreise. Die Grundkreise, die von einem und demselben Kreise rechtwinkelig oder unter dem Durchmesser geschnitten werden, sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

1)	A_{12}	A_{13}	A_{23}	A_{14}	A_{24}	A_{34}
2)	A_{12}	A_{13}	A_{23}	J_{14}	J_{24}	J_{34}
3)	A_{12}	J_{13}	J_{23}	A_{14}	A_{24}	J_{34}
4)	A_{12}	J_{13}	J_{23}	A_{34}	J_{24}	J_{14}
5)	A_{13}	J_{12}	J_{23}	A_{14}	A_{34}	J_{24}
6)	A_{13}	J_{12}	J_{23}	A_{24}	J_{14}	J_{34}
7)	A_{23}	J_{12}	J_{13}	A_{14}	J_{24}	J_{34}
8)	A_{23}	J_{12}	J_{13}	A_{24}	J_{14}	A_{34}.

Man erhält somit einen Kreis, der die vier gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet; vier Kreise, die drei der gegebenen unter gleichen Winkeln, den vierten unter dem Supplementwinkel schneiden; und drei Kreise, die zwei der gegebenen unter gleichen Winkeln, die beiden übrigen unter dem Supplementwinkel schneiden.

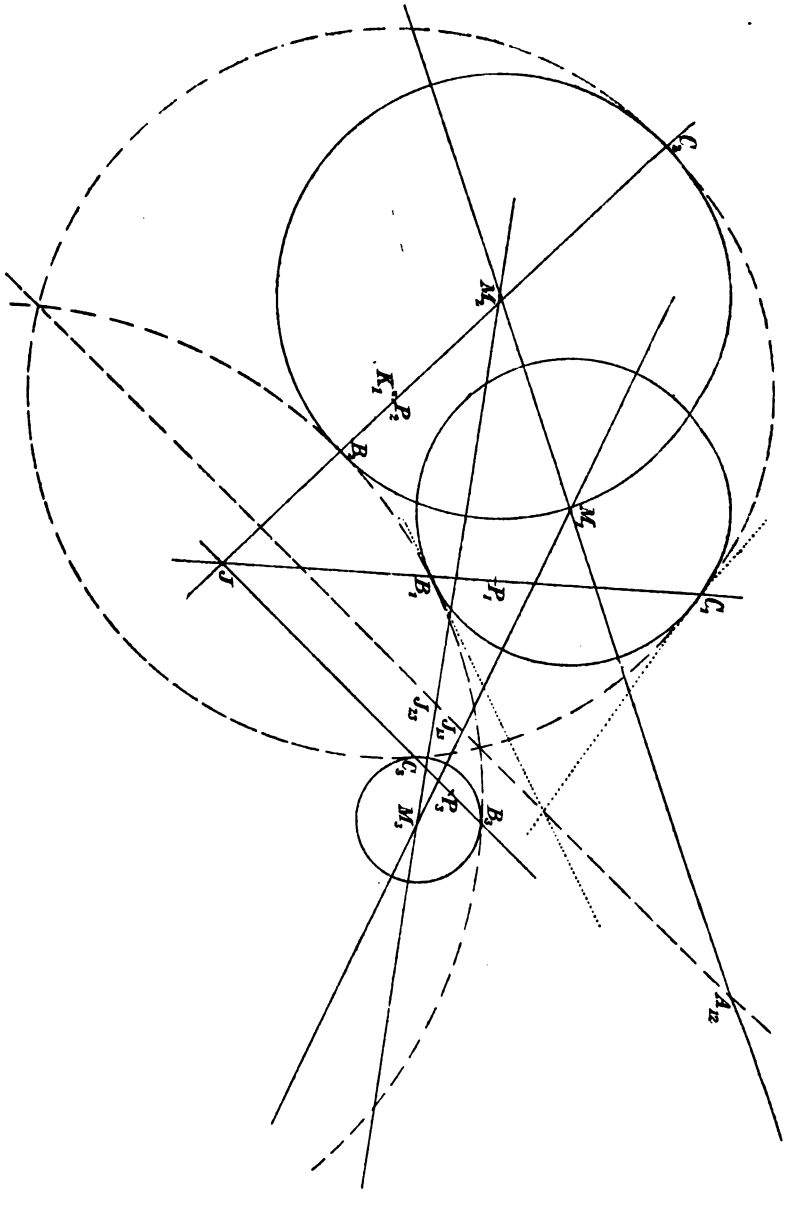
15. Zu der Gesamtheit der Kreise, die drei gegebene unter gleichen Winkeln oder zwei von ihnen unter gleichen, den dritten unter dem Supplementwinkel schneiden, gehören auch die Berührungskreise der gegebenen Kreise. Der Winkel zweier Kreise ist gleich Null oder gleich zwei Rechten, je nachdem eine einschliefsende oder eine ausschliefsende Berührung vorliegt. Die Berührungskreise gehören also vier Kreisbüscheln an. Jeder Büschel enthält aber im allgemeinen zwei Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren; folglich besitzen die drei gegebenen Kreise im allgemeinen acht Berührungskreise.

Wir beschränken uns auf die Konstruktion der Kreise K und K_1, von denen K die Kreise M_1 und M_2 ausschliefsend in B_1 und B_2 und M_3 einschliefsend in B_3, K_1 aber M_1 und M_2 einschliefsend in C_1 und C_2 und M_3 ausschliefsend in C_3 berührt (Fig. 248). Beide Kreise gehören dem Büschel an, dessen Kreise die Basis A_{12} rechtwinkelig und die Basen J_{13} und J_{23} unter dem Durchmesser schneiden; mithin ist die Ähnlichkeitsachse $A_{12}\,J_{13}\,J_{23}$ oder a die Potenzlinie von K und K_1.

Die gemeinschaftliche Tangente von M_1 und K im Punkte B_1 ist die Potenzlinie von M_1 und K, und die gemeinschaftliche Tangente von M_1 und K_1 im Punkte C_1 die Potenzlinie von M_1 und K_1; mithin ist der Schnittpunkt beider Tangenten ein Potenzpunkt von K und K_1, also ein Punkt der Ähnlichkeitsachse a der gegebenen Kreise. Dieser Schnittpunkt ist aber auch der Pol von B_1C_1 für den Kreis M_1. Geht aber a durch den Pol von B_1C_1, so geht auch B_1C_1 durch den Pol P_1 von a bezüglich des Kreises M_1. Somit geht auch B_2C_2 durch den Pol P_2 von a bezüglich M_2 und B_3C_3 durch den Pol P_3 von a bezüglich M_3.

Die Kreise K und K' werden von M_1 ungleichartig berührt, folglich geht B_1C_1 durch den innern Ähnlichkeitspunkt von K und K'. Dasselbe gilt für B_2C_2 und B_3C_3. Diese drei Geraden schneiden sich also in einem und demselben Punkte J. Da nun B_1 und C_1, B_2 und C_2, B_3 und C_3 nicht entsprechende Punkte der Kreise K und K' sind, so ist:

$$JB_1 \cdot JC_1 = JB_2 \cdot JC_2 = JB_3 \cdot JC_3.$$



X.

Der Punkt J ist also der Potenzpunkt der gegebenen Kreise, der Schnittpunkt ihrer Potenzlinien.

Da die Punkte J, P_1, P_2 und P_3 konstruierbar sind, so sind auch die Berührungspunkte bestimmt, und die Aufgabe ist darauf zurückgeführt, einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu legen.

Nach derselben Methode können alle besondern Fälle des Berührungsproblems behandelt werden, bei denen unter den gegebenen Kreisen mindestens einer vorkommt, dessen Radius weder unendlich klein noch unendlich grofs ist. Bei den übrigen Fällen versagt das Verfahren, da bei zwei Punkten die Lage der Ähnlichkeitspunkte und bei zwei Geraden die Lage der Potenzlinien unbestimmt ist. Diese Fälle aber, nämlich *PPP*, *PPG*, *PGG*, *GGG* bedürfen keiner weitern Betrachtung.

Übungen zu § 55.

1. Den Ort für die Spitze eines Dreiecks zu zeichnen, von dem eine Seite und die Differenz der Quadrate über den beiden andern Seiten gegeben ist.

2. Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise rechtwinkelig oder unter einem Durchmesser schneidet. Welche Eigenschaften besitzt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises?

3. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, der von zwei sich schneidenden Kreisen unter dem Durchmesser geschnitten wird oder von zwei gegebenen Kreisen rechtwinkelig geschnitten wird.

4. Von einem Kreisbüschel kennt man die Potenzlinie, einen Punkt der Centrale und zwei Punkte, die auf einer gegebenen Geraden oder auf einem gegebenen Kreise von einem Kreise des Büschels ausgeschnitten werden. In welchen Punkten wird die gegebene Gerade (oder der gegebene Kreis) von einem Kreise des Büschels berührt?

5. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise orthogonal oder beide diametral oder den einen orthogonal und den andern diametral schneidet und 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) eine gegebene Gerade berührt oder 3) einen gegebenen Kreis berührt oder 4) eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet

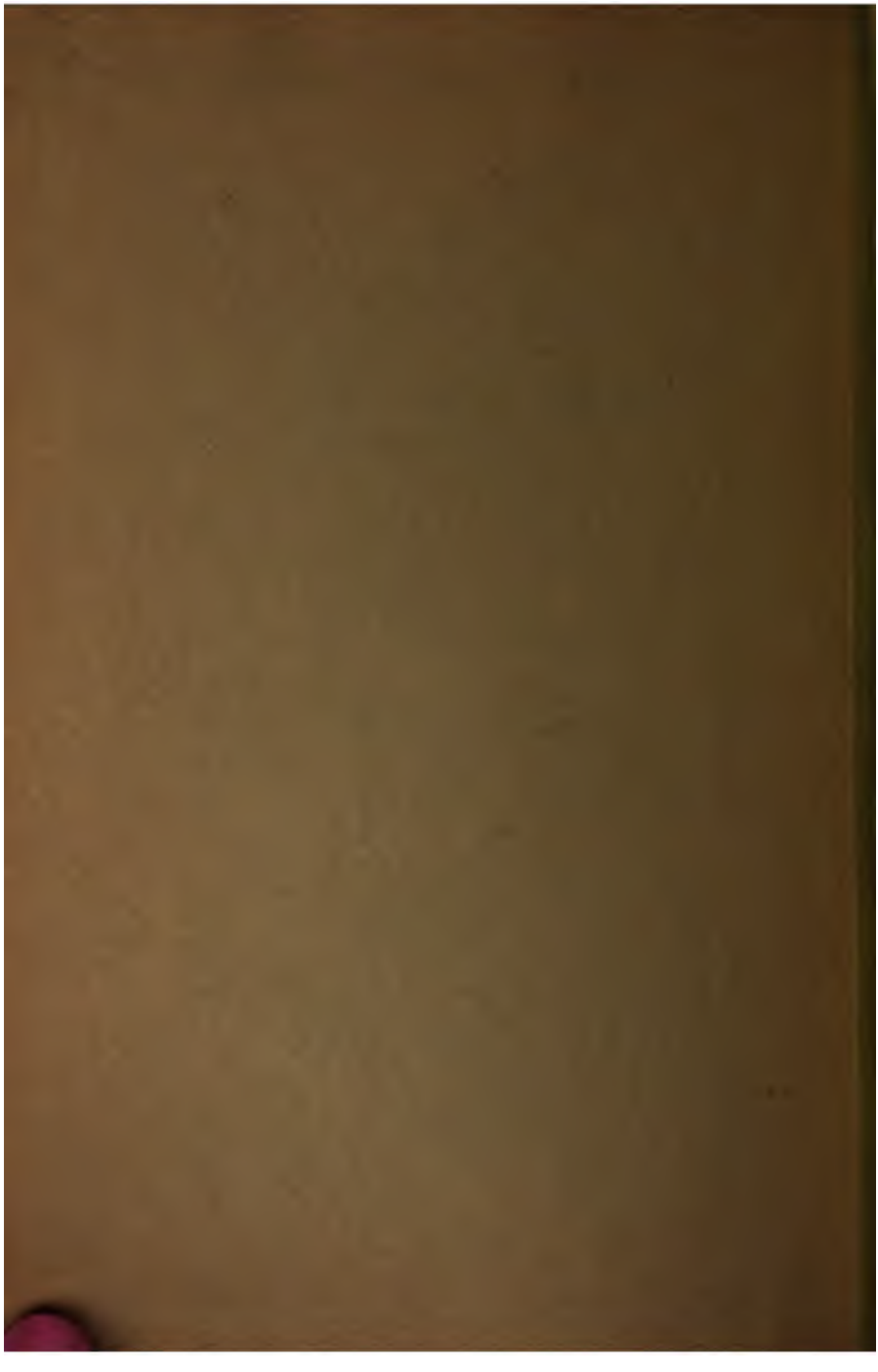
oder 5) einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet.

6. Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise unter einem gegebenen Winkel oder zwei von ihnen unter einem gegebenen Winkel, den dritten unter dem Supplementwinkel schneidet.

7. Einen Kreis zu zeichnen, der vier gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet oder drei von ihnen unter gleichen Winkeln und den vierten unter dem Supplementwinkel oder zwei von ihnen unter gleichen Winkeln und die beiden übrigen unter dem Supplementwinkel schneidet.

8. Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln oder zwei von ihnen unter gleichen Winkeln, den dritten unter dem Supplementwinkel schneidet und aufserdem 1) durch einen gegebenen Punkt geht oder 2) eine gegebene Gerade berührt oder 3) einen gegebenen Kreis berührt oder 4) einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet oder 5) eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet oder 6) einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet oder 7) einen gegebenen Kreis diametral schneidet.

9. Alle Kreise, welche drei gegebene Gerade unter gleichen Winkeln schneiden, gehören vier konzentrischen Kreisbüscheln an.

10. Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis oder zwei gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise oder eine gegebene Gerade und drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

11. Die besondern Fälle des Berührungsproblems nach der allgemeinen Methode zu lösen.